高三年级教学质量监测
数学参考答案(理科)

1.C　$(1-\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i})=(1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)(1+\mathrm{i})=-2\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2=2-2\mathrm{i}$.

2.D　由题意可得 $A=\{x|1<x<4\}$,则 $A\cup B=\{x|x<4\}$.

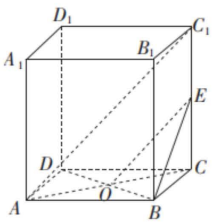
3.B　将该跑步爱好者这周的跑步时长按从小到大的顺序排列为 25,28,32,35,36,39,40,则该跑步爱好者这周跑步时长的中位数是 35.

4.B　由抛物线的定义可得 $|AF|=m+1=3$,解得 $m=2$,则 $n^2=8$,故 $m+n^2=2+8=10$.

5.B　由题意可得 $f(-x)=\log_3(-x+\sqrt{x^2+9})+a$.因为 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(-x)+f(x)=0$,即 $\log_3(-x+\sqrt{x^2+9})+a+\log_3(x+\sqrt{x^2+9})+a=0$,整理得 $2a+2=0$,解得 $a=-1$,故 $f(a+5)=f(4)=\log_3(4+\sqrt{4^2+9})-1=1$.

6.A　由题意可得$\begin{cases}a_1q+a_1q^3=10,\\ \dfrac{qa_1(1-q^3)}{1-q}=14,\end{cases}$整理得 $2q^2-5q+2=0$,解得 $q=2$ 或 $q=\dfrac{1}{2}$(舍去),则 $a_1=1$,故 $S_5=\dfrac{a_1(1-q^5)}{1-q}=31$.

7.C　连接 AC,交 DB 于点 O,取 CC_1 的中点 E,连接 OE,BE.因为 $AC_1/\!/OE$,所以 BD 与 AC_1 所成的角为 $\angle BOE$(或其补角).令 $EC=x$,在$\triangle BEO$ 中,由 $AB=8$,$AD=6$,得 $OB=5$.又 $OE=\sqrt{x^2+25}$,$BE=\sqrt{x^2+36}$,$\cos\angle BOE=\dfrac{\sqrt{7}}{10}$,由余弦定理得$\dfrac{OE^2+OB^2-BE^2}{2OE\cdot OB}=\dfrac{\sqrt{7}}{10}$,解得 $x=\sqrt{3}$,所以 $CC_1=2\sqrt{3}$.



8.C　因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{12}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$,则$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=-\dfrac{11}{12}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.因为$\overrightarrow{BE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,所以 $x=-\dfrac{11}{12}$,$y=\dfrac{1}{6}$,则 $x+y=-\dfrac{11}{12}+\dfrac{1}{6}=-\dfrac{3}{4}$.

9.A　作出 $f(x)$ 的大致图象(图略),由图可得 t 的取值范围是$(0,1)$.

10.D　因为 $f(x)=2\cos x\cos\varphi+2\sin x\sin\varphi+\cos x=2\sin\varphi\sin x+(2\cos\varphi+1)\cos x=\sqrt{(2\sin\varphi)^2+(2\cos\varphi+1)^2}\sin(x+\alpha)$,所以 $\sqrt{(2\sin\varphi)^2+(2\cos\varphi+1)^2}=\sqrt{6}$,所以 $\cos\varphi=\dfrac{1}{4}$,则 $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$,故 $f(\dfrac{\pi}{3})=2\cos(\dfrac{\pi}{3}-\varphi)+\cos\dfrac{\pi}{3}=\cos\varphi+\sqrt{3}\sin\varphi+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3+3\sqrt{5}}{4}$.

11.C　在三棱锥 C-ABD 中,底面 ABD 是以 AB 为斜边的直角三角形.

设底面 ABD 外接圆的圆心为 O'，则其半径 $r=4$，设三棱锥 C-ABD 外接球的球心为 O，半径为 R，因为二面角 A-BD-C 为$\frac{\pi}{3}$，所以点 C 到底面的距离为 $2\sqrt{3}$，且点 C 在底面的射影为 AD 的中点 E，所以 $O'E=2\sqrt{3}$. 设球心 O 到底面 ABD 的距离为 d，则 $r^2+d^2=R^2$，且 $O'E^2+(2\sqrt{3}-d)^2=R^2$，解得 $R^2=\frac{52}{3}$，所以 $S=4\pi R^2=\frac{208}{3}\pi$.

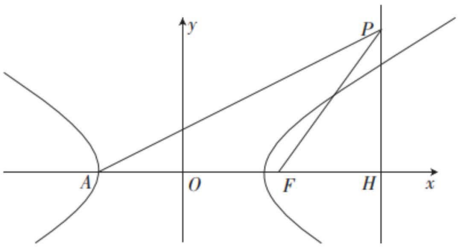
12. D　由 $f'(x)[g(x)+1]+f(x)g'(x)>4x^3$，得$[f(x)g(x)]'+f'(x)>(x^4)'$.
设函数 $h(x)=f(x)g(x)+f(x)-x^4$，则 $h'(x)=f'(x)[g(x)+1]+f(x)g'(x)-4x^3>0$，
所以 $h(x)$单调递增，所以 $h(2)>h(1)$，即 $f(2)g(2)+f(2)-2^4>f(1)g(1)+f(1)-1^4$.
因为 $f(1)=g(1)=1$，所以 $f(2)g(2)+f(2)-16>1$，即 $f(2)[g(2)+1]>17$.

13. 256　令 $x=1$，得$(3x-\frac{1}{\sqrt{x}})^8=(3-1)^8=256$.

14. 5　由等差数列性质可得 $S_{13}=13a_7=65$，则 $a_7=5$，故 $2a_5-a_3=2(a_1+4d)-(a_1+2d)=a_1+6d=a_7=5$.

15. $\frac{9}{10}$　由题意可知这 5 名职工最终的排名情况有 $A_5^5=120$ 种，其中 A，B 两人中恰有 1 人进入前 3 名的情况有 $C_2^1C_3^1C_3^2A_2^2A_2^2=72$ 种，A，B 两人都进入前 3 名的情况有 $C_3^1A_3^3A_2^2=36$ 种，故所求概率 $P=\frac{72+36}{120}=\frac{9}{10}$.

16. $2+\sqrt{7}$　如图，直线 $x=2c$ 与 x 轴交于点 H，设$|PH|=m$，则 $\tan\angle PFH=\frac{m}{c}$，$\tan\angle PAH=\frac{m}{a+2c}$. 因为$\angle APF=\angle PFH-\angle PAH$，所以 $\tan\angle APF=\tan(\angle PFH-\angle PAH)=\frac{\tan\angle PFH-\tan\angle PAH}{1+\tan\angle PFH\cdot\tan\angle PAH}=\frac{m(a+c)}{ac+2c^2+m^2}=\frac{(a+c)}{m+\frac{ac+2c^2}{m}}$. 因为 $m+\frac{ac+2c^2}{m}\geqslant 2\sqrt{ac+2c^2}$，当且仅当 $m=\sqrt{ac+2c^2}$时，等号成立，所以 $\tan\angle APF\leqslant\frac{a+c}{2\sqrt{ac+2c^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，整理得 $c^2-4ac-3a^2=0$，则 $e^2-4e-3=0$，解得 $e=2+\sqrt{7}$.



17. 解：(1)因为 $\cos C=-\frac{1}{4}$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.　……………………………… 2 分

因为 $c=2a$，所以 $\sin C=2\sin A$， …………………………………………………… 3 分

则 $\sin A=\frac{\sin C}{2}=\frac{\sqrt{15}}{8}$. …………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $\cos C=-\frac{1}{4}$，所以 $c^2=a^2+b^2+\frac{1}{2}ab$. ……………………………………… 6 分

因为 $c=2a$，所以 $3a^2-\frac{1}{2}ab-b^2=0$，解得 $b=\frac{3}{2}a$. ……………………………… 8 分

因为△ABC 的周长为 18，所以 $a+b+c=\frac{9}{2}a=18$，解得 $a=4$， ………………………… 9 分

则 $b=6$，$c=8$. ……………………………………………………………………………… 10 分

故△ABC 的面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 6\times 8\times\frac{\sqrt{15}}{8}=3\sqrt{15}$. ……………………………… 12 分

18. 解：(1)抽到对中医药文化了解程度高的市民的频率为 $\frac{9+6+22+18}{100}=\frac{11}{20}$. …………… 4 分

(2)根据表格可知从 41 岁～50 岁年龄段中随机抽取 1 人，这个人是对中医药文化了解程度高的市民的概率 $p_1=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$，了解程度低的概率 $p_2=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$. ………………………… 5 分

由题意可知 $X\sim B(3,\frac{2}{3})$，X 的可能取值为 0，1，2，3. …………………………………… 6 分

则 $P(X=0)=(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$. ………………………………………………………………… 7 分

$P(X=1)=C_3^1\times\frac{2}{3}\times(\frac{1}{3})^2=\frac{2}{9}$， …………………………………………………… 8 分

$P(X=2)=C_3^2\times(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$， …………………………………………………… 9 分

$P(X=3)=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$， ……………………………………………………………………… 10 分

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

……………………………………………………………………………………………… 11 分

X 的数学期望 $EX=0\times\frac{1}{27}+1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{8}{27}=2$. …………………………… 12 分

注：也可以写成 $EX=3\times\frac{2}{3}=2$.

19. (1)证明：取 SA 的中点 F，连接 CF，EF，CD.

因为 C，D 为圆弧 AB 的两个三等分点，所以 $CD/\!/AB$，$CD=\frac{1}{2}AB$. ………………… 2 分

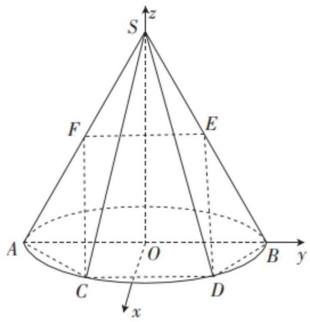
因为 E,F 分别为 SB,SA 的中点，所以 $EF/\!/AB,EF=\frac{1}{2}AB$， ………………………… 3 分

则 $CD/\!/EF,EF=CD$，从而四边形 $CDEF$ 为平行四边形，

故 $DE/\!/CF$. ……………………………………………………………………… 5 分

因为 $DE\not\subset$平面 SAC，$CF\subset$平面 SAC，所以 $DE/\!/$平面 SAC. ………………………… 6 分

(2)解：以 O 为坐标原点，分别以$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OS}$的方向为 y,z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.



因为 $AB=SA=4$，所以 $A(0,-2,0),B(0,2,0),C(\sqrt{3},-1,0)$，$D(\sqrt{3},1,0),S(0,0,2\sqrt{3})$，

则$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0),\overrightarrow{AS}=(0,2,2\sqrt{3}),\overrightarrow{BD}=(\sqrt{3},-1,0),\overrightarrow{BS}=(0,-2,2\sqrt{3})$. ………………………………………… 8 分

设平面 SAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}x_1+y_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AS}=2y_1+2\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},1)$. ………………………… 9 分

设平面 SBD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=\sqrt{3}x_2-y_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BS}=-2y_2+2\sqrt{3}z_2=0.\end{cases}$ 令 $x_2=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$. ………………………… 10 分

设平面 SAC 与平面 SBD 所成锐二面角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{5}$. ………………………………………… 12 分

20. 解：(1)由题意可得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3},\\ a=3,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $a=3,b=1$， ………………………………………… 3 分

则椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$. ……………………………………………………… 4 分

(2)当直线 l 的斜率为 0 时，设 $l:y=n(n\neq0),A(s,n),B(-s,n)$，

则 $k_1=\frac{n}{s-3},k_2=\frac{n}{-s-3}$，从而 $k_1k_2=\frac{n^2}{9-s^2}$.

因为 A 在椭圆C 上，所以$\frac{s^2}{9}+n^2=1$，所以 $n^2=\frac{9-s^2}{9}$，则 $k_1k_2=\frac{1}{9}\neq\frac{1}{4}$，不符合题意. ……
……………………………………………………………………………………… 6 分

当直线 l 的斜率不为 0 时，设直线 $l:x=my+t(t\neq3),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}x=my+t,\\ \dfrac{x^2}{9}+y^2=1,\end{cases}$整理得$(m^2+9)y^2+2mty+t^2-9=0$，

由题意可知$\Delta>0$，则 $y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{m^2+9}$，$y_1y_2=\dfrac{t^2-9}{m^2+9}$. ………………………………… 7 分

因为$P(3,0)$，所以$k_1=\dfrac{y_1}{x_1-3}$，$k_2=\dfrac{y_2}{x_2-3}$，

则 $k_1k_2=\dfrac{y_1}{x_1-3}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-3}=\dfrac{y_1y_2}{(x_1-3)(x_2-3)}=\dfrac{y_1y_2}{(my_1+t-3)(my_2+t-3)}$. …………… 8 分

因为$k_1k_2=\dfrac{1}{4}$，所以$\dfrac{y_1y_2}{(my_1+t-3)(my_2+t-3)}=\dfrac{1}{4}$，

所以$(m^2-4)y_1y_1+m(t-3)(y_1+y_2)+(t-3)^2=0$. ………………………………… 9 分

将 $y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{m^2+9}$，$y_1y_2=\dfrac{t^2-9}{m^2+9}$代入上式，得$(m^2-4)\cdot\dfrac{t^2-9}{m^2+9}+m(t-3)(-\dfrac{2mt}{m^2+9})+$
$(t-3)^2=0$，则$(m^2-4)(t^2-9)-2m^2t(t-3)+(t-3)^2(m^2+9)=0$，

整理得 $5t^2-54t+117=0$，即$(5t-39)(t-3)=0$.

因为$t\neq3$，所以 $t=\dfrac{39}{5}$. ………………………………………………………… 11 分

故直线 l 过定点$(\dfrac{39}{5},0)$. ……………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)$f'(x)=\dfrac{1-a-\ln x}{x^2}$. ………………………………………………… 1 分

当 $a\geqslant1$ 时，$f'(x)\leqslant0$ 对 $x\in[1,+\infty)$时恒成立，$f(x)$单调递减. ………………… 3 分

当 $a<1$ 时，$x\in[1,e^{1-a})$，$f'(x)>0$，则 $f(x)$在$[1,e^{1-a})$上单调递增， ……………… 4 分

$x\in(e^{1-a},+\infty)$，$f'(x)<0$，则 $f(x)$在$(e^{1-a},+\infty)$上单调递减. ……………………… 5 分

(2)由(1)知，令 $a=0$，得 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$在$[1,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，则$f(x)\leqslant$
$f(e)=\dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………………… 6 分

因为$x_1>x_2\geqslant1$，所以$(x_1-x_2)^{x_1x_2}=x_1^{x_2}x_2^{x_1}$，即 $x_1x_2\ln(x_1-x_2)=x_2\ln x_1+x_1\ln x_2$，即 $\ln(x_1-x_2)=\dfrac{\ln x_1}{x_1}+\dfrac{\ln x_2}{x_2}$， ……………………………………………………………… 7 分

因为 x_1，x_2 为正整数，所以 $x_1-x_2\geqslant1$.

当 $x_1-x_2=1$ 时，$x_1^{x_2}x_2^{x_1}=1$，

因为 $x_2\geqslant1$，$x_1\geqslant2$，所以 $x_1^{x_2}x_2^{x_1}>1$，这与 $x_1^{x_2}x_2^{x_1}=1$ 矛盾，不符合题意. ……………… 8 分

当 $x_1-x_2>1$ 时，因为$\dfrac{\ln x_1}{x_1}<\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{\ln x_2}{x_2}<\dfrac{1}{2}$，所以 $\ln(x_1-x_2)=\dfrac{\ln x_1}{x_1}+\dfrac{\ln x_2}{x_2}<1$， …… 9 分

所以 $x_1-x_2<e$，得 $x_1-x_2=2$，即 $\ln 2=\dfrac{\ln x_1}{x_1}+\dfrac{\ln x_2}{x_2}$. ………………………………… 10 分

经检验，当 $x_2=1,x_1=3$ 时，不符合题意，

当 $x_2=2,x_1=4$ 时，符合题意，

当 $x_2=3,x_1=5$ 时，因为 $3^5\times5^3<2^{15}$，所以 $\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 5}{5}<\ln 2$，…………………………… 11分

当 $x_2\geqslant4$ 时，$\frac{\ln x_1}{x_1}\leqslant\frac{\ln 6}{6}<\frac{\ln 5}{5}$，$\frac{\ln x_2}{x_2}\leqslant\frac{\ln 4}{4}<\frac{\ln 3}{3}$，

所以 $\frac{\ln x_1}{x_1}+\frac{\ln x_2}{x_2}<\frac{\ln 5}{5}+\frac{\ln 3}{3}<\ln 2$.

综上，仅存在 $x_1=4,x_2=2$ 满足条件. …………………………………………………………… 12分

22. 解：(1)由 $\begin{cases}x=1+\sqrt{3}t,\\ y=t\end{cases}$ (t 为参数)，得 $x-\sqrt{3}y=1$，即 $x-\sqrt{3}y-1=0$，

则直线 l 的普通方程为 $x-\sqrt{3}y-1=0$. ………………………………………………………… 2分

由 $\rho^2+4\rho\cos\theta-2\sqrt{3}\rho\sin\theta+3=0$，得 $x^2+y^2+4x-2\sqrt{3}y+3=0$，即 $(x+2)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$，则圆 C 的直角坐标方程为 $(x+2)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$. ……………………………………… 5分

(2)由(1)可知圆 C 的圆心坐标为 $(-2,\sqrt{3})$，半径为 2. ………………………………………… 7分

则圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|-2-3-1|}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1}}=3$. ………………………………………… 9分

故点 P 到直线 l 的距离的最大值为 $3+2=5$. ………………………………………………… 10分

23. 解：(1)因为 $a=-4$，所以 $f(x)=3|x-2|$. ………………………………………………………… 1分

当 $x\leqslant0$ 时，$3|x-2|\geqslant3x$ 恒成立，则 $x\leqslant0$ 符合题意；…………………………………… 3分

当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant3x$，即 $|x-2|\geqslant x$，即 $x^2-4x+4\geqslant x^2$，解得 $0<x\leqslant1$. ……………… 5分

综上，不等式 $f(x)\geqslant3x$ 的解集为 $(-\infty,1]$. …………………………………………………… 6分

(2)若 $a=4$，则 $f(x)=\begin{cases}-3x-2,x\leqslant-2,\\ x+6,-2<x<2,\\ 3x+2,x\geqslant2.\end{cases}$ ……………………………………………… 8分

$f(x)$ 在 $(-\infty,-2]$ 上单调递减，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，……………………………… 9分

故 $f(x)_{\min}=f(-2)=4$. ……………………………………………………………………………… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。