绝密★启用前

2024届高三12月质量检测

数　学

全卷满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 请按题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 选择题用2B铅笔在答题卡上把所选答案的标号涂黑；非选择题用黑色签字笔在答题卡上作答；字体工整，笔迹清楚。
4. 考试结束后，请将试卷和答题卡一并上交。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-4x+3\leqslant 0\}$，$B=\{y|y=2^x+1\}$，则 $A\cup B=$

A. $(1,+\infty)$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $(1,3]$　　D. $[1,3)$

2. 已知 $i(z-1)=z+1$，则 $\overline{z}=$

A. $-i$　　B. $1-i$　　C. i　　D. $1+i$

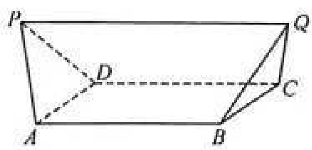
3. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为单位向量，若 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$

A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $-\frac{1}{5}$

4. 若函数 $f(x)=\frac{a\sin x}{1+e^x}-\sin x$ 为偶函数，则实数 $a=$

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. 2

5. 刍甍是《九章算术》中出现的一种几何体，如图所示，其底面 $ABCD$ 为矩形，顶棱 PQ 和底面平行，书中描述了刍甍的体积计算方法：求积术曰，倍下袤，上袤从之，以广乘之，又以高乘之，六而一，即 $V=\frac{1}{6}(2AB+PQ)BC\cdot h$（其中 h 是刍甍的高，即顶棱 PQ 到底面 $ABCD$ 的距离），已知 $AB=2BC=4$，$\triangle PAD$ 和 $\triangle QBC$ 均为等边三角形，若二面角 $P-AD-B$ 和 $Q-BC-A$ 的大小均为 $150°$，则该刍甍的体积为



A. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$　　B. $3\sqrt{3}$

C. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$　　D. $4\sqrt{3}$

6. 若 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-3$，$\tan\beta=3$，则 $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=$

A. -1　　B. $\frac{7}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

7. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，$a_1>0$，设甲：$q>1$；乙：$a_{n+2}>a_n$，则

A. 甲是乙的充分不必要条件

B. 甲是乙的必要不充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 已知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$，点 $P(2,0)$，$Q(3,0)$，若 C 上存在三个不同的点 M 满足 $|MQ|=2|MP|$，则 C 的离心率的取值范围为

A. $\left(1,\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$　　B. $\left(1,\frac{\sqrt{30}}{3}\right)$　　C. $\left(\frac{\sqrt{15}}{3},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{\sqrt{30}}{3},+\infty\right)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知圆 $C_1:(x-2)^2+y^2=1$，圆 $C_2:x^2+(y-a)^2=9$，则下列结论正确的是

A. 若 C_1 和 C_2 外离，则 $a>2\sqrt{3}$ 或 $a<-2\sqrt{3}$

B. 若 C_1 和 C_2 外切，则 $a=\pm2\sqrt{3}$

C. 当 $a=0$ 时，有且仅有一条直线与 C_1 和 C_2 均相切

D. 当 $a=2$ 时，C_1 和 C_2 内含

10. 已知正实数 x,y 满足 $x+4y=xy$，则

A. $xy\leqslant16$　　B. $x+y\geqslant9$

C. $\frac{1}{x}-\frac{y}{16}$ 的最大值为 0　　D. 4^x+4^y 的最小值为 2^{10}

11. 已知 $f(x)=\log_2x+x$，$g(x)=2^x+x$，若 $f(a)=g(b)=2$，则

A. $a=2^b$　　B. a

C. $a-b>1$　　D. $ab<2\sqrt{2}-2$

12. 在三棱锥 A_1-ABC 中，$A_1A\perp$平面 ABC，$AB\perp AC$，$AA_1=AB=AC=3$，P 为 $\triangle A_1BC$ 内的一个动点（包括边界），AP 与平面 A_1BC 所成的角为 45°，则

A. A_1P 的最小值为 $\sqrt{6}+\sqrt{3}$

B. A_1P 的最大值为 $\sqrt{6}+\sqrt{3}$

C. 有且仅有一个点 P，使得 $A_1P\perp BC$

D. 所有满足条件的线段 AP 形成的曲面面积为 $\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设 S_n 是公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $3a_2=a_4$，则$\frac{S_4}{a_4}$= ________.

14. 已知函数 $f(x)=\ln(ax+1)$，且 $y=2x$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条切线，则 $a=$ ________.

15. 设 F_1,F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，O 为坐标原点，M 为 C 上一个动点，且 $|\overrightarrow{MF_1}|^2+2\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{F_1O}$ 的取值范围为 $[1,3]$，则椭圆 C 的长轴长为 ________.

16. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$，若 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，且 $f(0)+f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=0$，则

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=$ ________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

记$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，面积为 S，且 $S=\frac{abc}{4}$.

(1)求$\triangle ABC$ 的外接圆的半径；

(2)若 $b+c=2$，且 $A=\frac{2\pi}{3}$，求 BC 边上的高.

18.（本小题满分 12 分）

设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$\frac{S_1}{1}+\frac{S_2}{2}+\cdots+\frac{S_n}{n}=2^n-1$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=\frac{n+2}{na_n}$，证明：$b_1+b_2+\cdots+b_n<4$.

19.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x(x^2-ax-a)$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

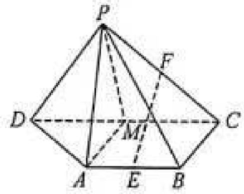
(2)当 $a\geqslant 0$ 时，设 x_1,x_2 分别为 $f(x)$ 的极大值点、极小值点，求 $f(x_1)-f(x_2)$ 的取值范围.

20.(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,$AB\perp BC$,$2AB=2BC=CD=PD=PC$,设 E,F,M 分别为棱 AB,PC,CD 的中点.

(1)证明:$EF/\!/$平面 PAM;

(2)若 $PA=PM$,求 EF 与平面 PCD 所成角的正弦值.



21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x^2\ln x-2\ln x+ax^2-\frac{1}{2}$,$a\in\mathbf{R}$.

(1)证明:$f(x)$有唯一的极值点;

(2)若 $f(x)\geqslant 0$,求 a 的取值范围.

22.(本小题满分 12 分)

已知抛物线 C:$y^2=2px(p>0)$,F 为 C 的焦点,$P(4,y_0)(y_0>0)$在 C 上,且$|PF|=5$.

(1)求抛物线 C 的方程;

(2)若直线 l 与 C 交于 A,B 两点(A,B 分别位于直线 $x=4$ 的两侧),且直线 PA,PB 的斜率之和为 0,

(i)求直线 l 的斜率;

(ii)求$\triangle PAB$ 的面积的最大值.

2024 届高三 12 月质量检测·数学

参考答案、提示及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	D	D	A	B	C	A
题号	9	10	11	12				
答案	ABC	BC	ABD	ACD				

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.【答案】B

【解析】由 $x^2-4x+3\leqslant 0$,解得 $1\leqslant x\leqslant 3$,所以 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$,因为 $y=2^x+1>1$,所以 $B=\{y|y>1\}$,$A\cup B=\{x|x\geqslant 1\}$,故选 B.

2.【答案】C

【解析】因为 $i(z-1)=z+1$,$z=\dfrac{1+i}{i-1}=\dfrac{(1+i)^2}{(i-1)(1+i)}=-i$,所以 $\overline{z}=i$,故选 C.

3.【答案】D

【解析】依题意,$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}^2+5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=1+5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\dfrac{1}{5}$,故选 D.

4.【答案】D

【解析】由题意,$f(x)=\dfrac{a\sin x}{1+e^x}-\sin x=\dfrac{a-1-e^x}{1+e^x}\sin x=f(-x)=\dfrac{a-1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\sin(-x)$,

所以 $\dfrac{a-1-e^x}{1+e^x}=-\dfrac{a-1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=-\dfrac{(a-1)e^x-1}{1+e^x}$,所以 $(a-2)(e^x+1)=0$.解得 $a=2$,故选 D.

5.【答案】A

【解析】设 P_1 和 Q_1 分别是 P,Q 在底面的投影,设 M 为 AD 的中点,则 $PM=\sqrt{3}$,$h=PM\sin 30^\circ=\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$P_1M=PM\cos 30^\circ=\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}$,所以 $P_1Q_1=AB+2P_1M=4+3=7$,$V=\dfrac{1}{6}(2AB+PQ)BC\cdot h=\dfrac{1}{6}\times(2\times 4+7)\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$,故选 A.

6.【答案】B

【解析】因为 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=-3$,解得 $\tan\alpha=2$,

所以 $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=\dfrac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\dfrac{1+2\times 3}{2+3}=\dfrac{7}{5}$,故选 B.

7.【答案】C

【解析】考虑充分性:因为 $a_1>0$,当 $q>1$ 时,$a_n>0$,所以 $a_{n+2}-a_n=a_n(q^2-1)>0$,满足充分性;考虑必要性:$a_{n+2}>a_n$,即 $a_n(q^2-1)>0$,当 $q=1$,$a_{n+2}=a_n$,当 $q<0$ 时,a_n 正负交替,$a_n(q^2-1)$ 不可能恒大于 0,当 $0<q<1$ 时,$a_n(q^2-1)<0$,当 $q>1$,$a_n(q^2-1)>0$,满足必要性,所以甲是乙的充要条件,故选 C.

8.【答案】A

【解析】设 $M(x,y)$,由 $|MQ|=2|MP|$,可得 $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$,整理得 $\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{4}{9}$,

将点 M 的轨迹与双曲线联立,即 $b^2(x^2-1)+\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2-\dfrac{4}{9}=0$,整理得 $b^2(x^2-1)+\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2-\dfrac{4}{9}=$

$(x-1)\cdot\left[(b^2+1)x+b^2-\frac{7}{3}\right]=0$，解得 $x=1$ 或 $x=\frac{\frac{7}{3}-b^2}{1+b^2}$，所以 $\frac{\frac{7}{3}-b^2}{1+b^2}>1$，解得 $b^2<\frac{2}{3}$，所以 C 的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+b^2}<\frac{\sqrt{15}}{3}$，故选 A.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.【答案】ABC

【解析】$C_1(-2,0)$，$C_2(0,a)$，$|C_1C_2|=\sqrt{4+a^2}$，$r_1=1$，$r_2=3$，若 C_1 和 C_2 外离，则 $|C_1C_2|=\sqrt{4+a^2}>r_1+r_2=4$，解得 $a>2\sqrt{3}$ 或 $a<-2\sqrt{3}$，A 选项正确；来源：高三答案公众号

若 C_1 和 C_2 外切，$|C_1C_2|=\sqrt{4+a^2}=4$，解得 $a=\pm2\sqrt{3}$，B 选项正确；

当 $a=0$ 时，$|C_1C_2|=2=r_2-r_1$，C_1 和 C_2 内切，故仅有一条公切线，C 选项正确；

当 $a=2$ 时，$2=r_2-r_1<|C_1C_2|=2\sqrt{2}<r_1+r_2=4$，$C_1$ 和 C_2 相交，D 选项错误；故选 ABC.

10.【答案】BC

【解析】$x+4y=xy\geqslant2\sqrt{4xy}=4\sqrt{xy}$，当且仅当 $x=4y$，即 $x=8$，$y=2$ 时等号成立，所以 $xy\geqslant16$，A 选项错误；

由 $x+4y=xy$，可知 $\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=1$，所以 $x+y=\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)=5+\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant5+2\sqrt{\frac{4y}{x}\times\frac{x}{y}}=9$，当且仅当 $x=2y$，即 $x=6$，$y=3$ 时等号成立，B 选项正确；

由 $x+4y=xy$，可知 $x=\frac{4y}{y-1}$，所以 $\frac{1}{x}-\frac{y}{16}=\frac{y-1}{4y}-\frac{y}{16}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4y}+\frac{y}{16}\right)\leqslant\frac{1}{4}-2\sqrt{\frac{1}{4y}\times\frac{y}{16}}=0$，当且仅当 $y=2$ 时等号成立，C 选项正确；

$4^x+4^y\geqslant2\sqrt{4^x\times4^y}=2^{x+y+1}$，当 $x=y$ 时等号成立，由 B 可知，$x+y\geqslant9$，当且仅当 $x=2y$ 时等号成立，因为前后两次不等式取等条件不一致，所以 $4^x+4^y>2^{10}$，D 选项错误，故选 BC.

11.【答案】ABD

【解析】因为 $\log_2a+a=2^b+b=\log_22^b+2^b$，所以 $f(a)=f(2^b)$，又 $\log_2x$，x 均单调递增，所以 $f(x)$ 单调递增，故 $a=2^b$，A 选项正确；

由 A 可知 $a=2^b$，所以 $\log_2a+a=b+a=2$，B 选项正确；

因为 $f(x)$ 单调递增，且 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\log_2\frac{3}{2}+\frac{3}{2}>\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$，$f(\sqrt{2})=\log_2\sqrt{2}+\sqrt{2}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}<2$，根据零点存在定理，有 $\sqrt{2}<a<\frac{3}{2}$，$a-b=a-(2-a)=2a-2<1$，C 选项错误；

$ab=a(2-a)$，因为二次函数 $y=a(2-a)$ 的对称轴为 1，且在区间 $\left(\sqrt{2},\frac{3}{2}\right)$ 上单调递减，所以 $\frac{3}{4}<ab<2\sqrt{2}-2$，D 选项正确，故选 ABD.

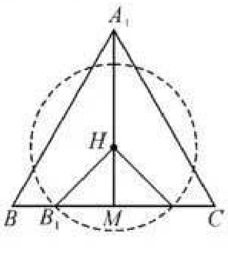
12.【答案】ACD

【解析】依题意，$A_1B=A_1C=BC=3\sqrt{2}$，取 BC 的中点 M，则 $AM\perp BC$，$A_1M\perp BC$，

所以 $BC\perp$ 平面 A_1AM，过 A 作 $AH\perp A_1M$ 于 H，因为 $AH\subset$ 平面 A_1AM，

所以 $AH\perp BC$，且 $A_1M\cap BC=M$，所以 $AH\perp$ 平面 A_1BC，易得 $AH=\sqrt{3}$，且 H 为等边 $\triangle A_1BC$ 的外心，

由 AP 与平面 A_1BC 所成角为 45°，可知 $AH=HP$，所以点 P 轨迹是以 H 为圆心，以 $\sqrt{3}$ 为半径的圆在 $\triangle A_1BC$ 内部的一部分，如图所示，



所以 A_1P 的最小值为 $A_1H-HP=\sqrt{6}-\sqrt{3}$，A 选项正确；

由于轨迹圆部分在平面 A_1BC 外部，所以 A_1P 的最大值不等于 A_1H+HP，B 选项错误；

因为 $BC\perp$ 平面 A_1AM，若 $A_1P\perp BC$，则点 P 在线段 A_1H 上，有且仅有一个点 P 满足题意，C 选项正确；

动线段 AP 形成的曲面为圆锥 AH 侧面积的一部分，因为 $\cos\angle B_1HM=\frac{HM}{HB_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\angle B_1HM=\frac{\pi}{4}$，因为 $\frac{2\pi-2\times\frac{\pi}{4}\times 3}{2\pi}=\frac{1}{4}$，所以曲面面积为圆锥侧面面积的 $\frac{1}{4}$，

圆锥 AH 侧面积为 $\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times 2\pi\times\sqrt{3}=3\sqrt{2}\pi$，

所以所有满足条件的动线段 AP 形成的曲面面积为 $\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$，D 选项正确，故选 ACD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.【答案】$\frac{2023}{2}$

【解析】因为 $3a_2=a_4$，即 $3(a_1+d)=a_1+3d$，所以 $a_1=0$，$\frac{S_{2023}}{a_{2023}}=\frac{\frac{a_1+a_1+2022d}{2}\times 2023}{a_1+2022d}=\frac{2023}{2}$.

14.【答案】2

【解析】$f(0)=0$，$f'(x)=\frac{a}{ax+1}$，设切点为 $(x_0,\ln(ax_0+1))$，

则切线方程为 $y-\ln(ax_0+1)=\frac{a}{ax_0+1}(x-x_0)$，

依题意 $\frac{a}{ax_0+1}=2$，且 $\ln(ax_0+1)-\frac{ax_0}{ax_0+1}=0$，解得 $a=2$.

15【答案】$2\sqrt{5}$

【解析】$|\overrightarrow{MF_1}|^2+2\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{F_1O}=\overrightarrow{MF_1}\cdot(\overrightarrow{MF_1}+2\overrightarrow{F_1O})=\overrightarrow{MF_1}\cdot(\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{F_1F_2})=\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OF_1})\cdot(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OF_2})=|\overrightarrow{MO}|^2-|\overrightarrow{OF}|^2=|\overrightarrow{MO}|^2-c^2$，

$\because |\overrightarrow{MO}|\in[b,a]$，$\therefore (|\overrightarrow{MO}|^2-c^2)\in[b^2-c^2,a^2-c^2]$，$\therefore \begin{cases}b^2-c^2=1,\\a^2-c^2=3,\\a^2=b^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=5,\\b^2=3,\\c^2=2,\end{cases}$

$\therefore$ 长轴长 $2a=2\sqrt{5}$.

16.【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】由 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 可知，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最大值，所以 $\omega\times\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

又 $f(0)+f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=0$，即 $\sin\varphi=-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\omega+\varphi\right)=-\sin(8k\pi+2\pi-4\varphi+\varphi)=\sin 3\varphi$，

因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi+3\varphi=\pi$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，所以 $\omega=12k+\frac{3}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{3}\times\left(12k+\frac{3}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.【答案】(1)1 (2)$\frac{1}{2}$

【解析】(1)依题意 $S=\frac{abc}{4}=\frac{1}{2}bc\sin A$，所以 $\frac{a}{\sin A}=2$， …… 2 分

由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=2R$，得 $R=1$， …… 3 分

所以 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1； …… 4 分

(2)由(1)可知，$\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\sin\frac{2\pi}{3}}=2$，解得 $a=2\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$， …… 5 分

由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2+bc=(b+c)^2-bc$，…… 7 分

即 $3=2^2-bc$，解得 $bc=1$，…… 8 分

设 BC 边上的高为 h，则 $S=\frac{abc}{4}=\frac{1}{2}a\times h$，所以 $h=\frac{bc}{2}=\frac{1}{2}$. …… 10 分

18.【答案】(1) $a_n=(n+1)\cdot 2^{n-2}$　(2)略

【解析】(1)解：因为 $\frac{S_1}{1}+\frac{S_2}{2}+\cdots+\frac{S_n}{n}=2^n-1$　①，

当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{S_1}{1}+\frac{S_2}{2}+\cdots+\frac{S_{n-1}}{n-1}=2^{n-1}-1$　②，…… 2 分

①－②，可得 $\frac{S_n}{n}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，所以 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=n\cdot 2^{n-1}$，…… 4 分

当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n2^{n-1}-(n-1)2^{n-2}=(n+1)\cdot 2^{n-2}$，…… 5 分

又当 $n=1$ 时，$a_1=2^1-1=1$，当 $n=2$ 时，$S_2=a_1+a_2=4$，所以 $a_2=3$，

所以当 $n=1,2$ 时符合 $a_n=(n+1)\cdot 2^{n-2}$，

综上，$a_n=(n+1)\cdot 2^{n-2}$； …… 6 分

(2)证明：由(1)知，$b_n=\frac{n+2}{n\cdot(n+1)2^{n-2}}=\frac{2(n+1)-n}{n(n+1)\cdot 2^{n-2}}=\frac{1}{n\cdot 2^{n-3}}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n-2}}$，…… 9 分

所以 $b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{1\times 2^{-2}}-\frac{1}{2\times 2^{-1}}+\frac{1}{2\times 2^{-1}}-\frac{1}{3\times 2^{0}}+\cdots+\frac{1}{n\times 2^{n-3}}-\frac{1}{(n+1)\times 2^{n-2}}$

$=\frac{1}{1\times 2^{-2}}-\frac{1}{(n+1)\times 2^{n-2}}=4-\frac{1}{(n+1)\times 2^{n-2}}<4$. …… 12 分

19.【答案】(1)详解见解析　(2) $[4e^{-2},+\infty)$

【解析】(1) $f'(x)=e^x(x^2-ax+2x-2a)=e^x(x+2)(x-a)$，…… 1 分

当 $a=-2$ 时，$f'(x)=e^x(x+2)^2\geqslant 0$，$f(x)$ 单调递增； …… 2 分

当 $a\neq -2$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-2$ 或 $x=a$ …… 3 分

所以当 $a>-2$ 时，$f'(x)>0$，$x\in(-\infty,-2)\cup(a,+\infty)$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$，$(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-2,a)$ 上单调递减，

当 $a<-2$ 时，$f'(x)>0$，$x\in(-\infty,a)\cup(-2,+\infty)$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,a)$，$(-2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(a,-2)$ 上单调递减； …… 6 分

(2)当 $a\geqslant 0$ 时，由(1)可知，$x_1=-2$，$x_2=a$，…… 8 分

则 $f(x_1)=f(-2)=(a+4)e^{-2}$，$f(x_2)=f(a)=-ae^a$，…… 9 分

所以 $f(x_1)-f(x_2)=(a+4)e^{-2}+ae^a$，…… 10 分

设 $g(a)=(a+4)e^{-2}+ae^a(a\geqslant 0)$，则 $g'(a)=e^{-2}+(a+1)e^a>0$，

所以 $g(a)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$g(a)\geqslant g(0)=4e^{-2}$，…… 11 分

所以 $f(x_1)-f(x_2)$ 的取值范围是 $[4e^{-2},+\infty)$. …… 12 分

20.【答案】(1)略　(2) $\frac{\sqrt{165}}{15}$

【解析】(1)证明：取 PM 的中点 N，则 $NF/\!/CM$，且 $2NF=CM$，…… 1 分

又 $AE/\!/CM$，且 $2AE=CM$，所以 $NF\underline{/\!/}AE$，所以四边形 $AEFN$ 为平行四边形，…… 2 分

所以 $EF/\!/AN$，又 $AN\subset$ 平面 PAM，$EF\not\subset$ 平面 PAM，所以 $EF/\!/$ 平面 PAM； …… 4 分

(2)解：作 AM 的中点 H，连接 PH，$\because PA=PM$，$\therefore PH\perp AM$，…… 5 分

又 $\because CD=PD=PC$，M 是 CD 的中点，$\therefore CD\perp PM$，

又 $\because 2AB=2BC=CD$，$AB/\!/CD$，$AB\perp BC$，M 是 CD 的中点，$\therefore CD\perp AM$，

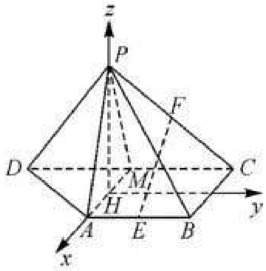
$\because AM\cap PM=M$，$\therefore CD\perp$ 平面 PAM，$CD\perp PH$，…… 6 分

$\because PH\perp CD$，$PH\perp AM$，$AM\cap CD=M$，AM，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PH\perp$ 平面 $ABCD$，

不妨设 $2AB=2BC=CD=4$，…… 7 分

以点 H 为坐标原点，分别以 HA，过点 H 平行于 CD 的直线，PD 所在的直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，$A(1,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{11})$，$M(-1,0,0)$，$C(-1,2,0)$，

则 $\overrightarrow{PM}=(-1,0,-\sqrt{11})$，$\overrightarrow{MC}=(0,2,0)$.



因为 N 为 PM 的中点，所以 $N\left(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AN}=\left(-\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$， …… 8 分

由(1)可知，$EF\parallel AN$，所以 EF 与平面 PCD 所成角即为 AN 与平面 PCD 所成角，

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 PCD 的一个法向量，

则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MC}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-x-\sqrt{11}z=0,\\ y=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，则 $x=-\sqrt{11}$，

即 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{11},0,1)$， ………………………………………………………………………… 10 分

设 AN 与平面 PCD 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AN}|}{|\boldsymbol{n}|\,|\overrightarrow{AN}|}=\dfrac{2\sqrt{11}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{165}}{15}$，

所以 EF 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{165}}{15}$. ………………………………………………… 12 分

21.【答案】(1)略　(2)$a\geqslant\frac{1}{2}$

【解析】(1)证明：$f'(x)=2x\ln x+x-\frac{2}{x}+2ax=x\left(2\ln x-\frac{2}{x^2}+1+2a\right)$， …………………… 1 分

设 $g(x)=2\ln x-\frac{2}{x^2}+1+2a$，则 $g'(x)=\frac{2}{x}+\frac{4}{x^3}>0$， …………………………………… 3 分

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(e^{-\frac{2a+1}{2}})<2\ln e^{-\frac{2a-1}{2}}+1+2a=0$，

取 $x_1>1$，且 $x_1>e^{\frac{1-2a}{2}}$，且 $g(x_1)>2\ln x_1-2+1+2a>2\ln e^{\frac{1-2a}{2}}-1+2a=0$，

所以存在唯一 $x_0\in(e^{-\frac{2a+1}{2}},x_1)$，使得 $g(x_0)=0$， ……………………………………………… 5 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取得极小值，所以 $f(x)$ 有唯一极值点； …………………………………………… 6 分

(2)解：由(1)可知，$g(x_0)=2\ln x_0-\frac{2}{x_0^2}+1+2a=0$，即 $ax_0^2=1-\frac{x_0^2}{2}-x_0^2\ln x_0$， ……………… 7 分

依题意，$f(x_0)=x_0^2\ln x_0-2\ln x_0+ax_0^2-\frac{1}{2}\geqslant 0$， ………………………………………………… 8 分

将 $ax_0^2=1-\frac{x_0^2}{2}-x_0^2\ln x_0$ 代入整理可得，$-2\ln x_0-\frac{x_0^2}{2}+\frac{1}{2}\geqslant 0$，

设 $h(x)=-2\ln x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$，则 $h'(x)=-\frac{2}{x}-x<0$，

所以 $h(x)$ 单调递减，又 $h(1)=0$，所以 $h(x_0)\geqslant h(1)$，故 $x_0\leqslant 1$， …………………………… 10 分

所以 $g(x_0)=0\leqslant g(1)=2a-1$，解得 $a\geqslant\frac{1}{2}$，

所以 a 的取值范围是 $a\geqslant\frac{1}{2}$. …………………………………………………………………… 12 分

22.【答案】(1)$y^2=4x$　(2)(ⅰ)$-\frac{1}{2}$　(ⅱ)$\frac{256\sqrt{3}}{9}$

【解析】(1)易知 C 的准线为 $x=-\frac{p}{2}$， ……………………………………………………………… 1 分

由抛物线的定义得 $|PF|=4+\frac{p}{2}=5$，解得 $p=2$， …………………………………………………… 3 分

所以 C 的方程为 $y^2=4x$；………………………………………………………………………… 4 分

(2)(ⅰ)将 $x=4$ 代入 C 的方程，解得 $y_0^2=4\times4=16$，所以 $y_0=4$，

设 $A\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right)$，$B\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right)$，则直线 AB 斜率为 $\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}}=\frac{4}{y_1+y_2}$，………………………………………… 5 分

因为 $P(4,4)$，则直线 PB 斜率为 $\frac{y_2-4}{\frac{y_2^2}{4}-4}=\frac{4}{4+y_2}$，

同理可得直线 PA 斜率为 $\frac{4}{4+y_1}$，……………………………………………………………………… 6 分

依题意 $\frac{4}{4+y_1}+\frac{4}{4+y_2}=\frac{4(8+y_1+y_2)}{(4+y_1)(4+y_2)}=0$，解得 $y_1+y_2=-8$，

所以直线 l 的斜率为 $\frac{4}{y_1+y_2}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$；…………………………………………………… 8 分

(ⅱ)设直线 AB：$x=-2y+m$，与抛物线方程联立可得 $\begin{cases}x=-2y+m,\\ y^2=4x,\end{cases}$

整理得 $y^2+8y-4m=0$，$\Delta=8^2+4\times4m=16(4+m)>0$，

$y_1y_2=-4m$，$y_1+y_2=-8$，……………………………………………………………………… 9 分

因为 A，B 分别位于直线 $x=4$ 的两侧，

所以 $\left(\frac{y_1^2}{4}-4\right)\left(\frac{y_2^2}{4}-4\right)=m^2-8m-48=(m+4)(m-12)<0$，所以 $-4<m<12$，

$|AB|=\sqrt{1+(-2)^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{5}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4\sqrt{5}\sqrt{m+4}$，……………………………… 10 分

点 P 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{12-m}{\sqrt{1+(-2)^2}}$，

$\triangle PAB$ 面积为 $\frac{1}{2}|AB|\cdot d=2\sqrt{m+4}(12-m)$，

设 $\sqrt{m+4}=t$，$t\in(0,4)$，$S_{\triangle PAB}=2t(16-t^2)=32t-2t^3$，

$S'(t)=32-6t^2=0$，$t=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $t=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$(舍)，…………………………………………… 11 分

故面积的最大值为 $S=2\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\left(16-\frac{16}{3}\right)=\frac{256\sqrt{3}}{9}$.

所以 $\triangle PAB$ 面积的最大值为 $\frac{256\sqrt{3}}{9}$. ……………………………………………………………