2023—2024 学年度第一学期高三期末调研考试

数学试题

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分.考试用时 120 分钟.

注意事项：

1.答卷前，考生务必用黑色字迹或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上.将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.

2.作答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔 2B 把答题卡对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用格皮擦干净后，再选涂其它答案，答案不能答在试卷上.

3.非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.

4.考生必须保持答题卡的整洁.考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.集合 $A=\{x|x^2+x-6=0\}$，$B=\{2,3\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\varnothing$　　B. $\{2\}$　　C. $\{3\}$　　D. $\{2,3\}$

2.已知 i 为虚数单位，且 $zi=1+\mathrm{i}$，则 $z\cdot\bar{z}=$（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

3.已知 m，n 为两条不同的直线，α，β 为两个不同的平面，则下列结论正确的是（　　）

A. $\alpha//\beta$，$m//\alpha$，则 $m//\beta$　　B. $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m//\beta$，$n//\beta$，则 $\alpha//\beta$

C. $m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n//\beta$，则 $\alpha\perp\beta$　　D. $m\perp\alpha$，$m//n$，$\alpha//\beta$，则 $n\perp\beta$

4.若 $f(x)=\begin{cases}2x+m,x<0\\nx+1,x>0\end{cases}$ 是奇函数，则（　　）

A. $m=-1$，$n=2$　　B. $m=1$，$n=-2$

C. $m=1$，$n=2$　　D. $m=-1$，$n=-2$

5.已知锐角 α 的顶点在原点，始边在 x 轴非负半轴，现将角 α 的终边绕原点逆时针转 $\frac{\pi}{3}$ 后，交以原点为圆心的单位圆于点 $P\left(-\frac{4}{5},y\right)$，则 $\cos\alpha$ 的值为（　　）

A. $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$　　B. $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$　　C. $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$　　D. $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$

6.已知向量$\vec{a}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，$\vec{b}$为单位向量，且满足$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{b}-2\vec{a}\right|$，则向量$\vec{b}$在向量$\vec{a}$方向的投影向量为（　　）

A.$\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$　　B.$\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$　　C.$\left(\frac{3}{10},\frac{2}{5}\right)$　　D.$\left(\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right)$

7.保定的府河发源于保定市西郊，止于白洋淀藻杂淀，全长26公里.府河作为保定城区主要的河网水系，是城区内主要的排沥河道.府河桥其桥拱曲线形似悬链线，桥型优美，是我市的标志性建筑之一，悬链线函数形式为$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$，当其中参数$a=1$时，该函数就是双曲余弦函数$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，类似地有双曲正弦函数$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.若设函数$f\left(x\right)=\sinh x\cdot\cosh x$，若实数$x$满足不等式$f\left(3x-4\right)+f\left(x^2\right)<0$，则$x$的取值范围为（　　）

A.$\left(-4,1\right)$　　B.$\left(-1,4\right)$　　C.$\left(-4,-1\right)$　　D.$\left(1,4\right)$

8.在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）中，$F_1$，$F_2$分别是左，右焦点，$P$为椭圆上一点（非顶点），$I$为$\triangle PF_1F_2$内切圆圆心，若$\frac{S_{\triangle IF_1F_2}}{S_{\triangle PF_1F_2}}=\frac{1}{3}$，则椭圆的离心率$e$为（　　）

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9.下列说法正确的是（　　）

A.从50个个体中随机抽取一个容量为20的样本，则每个个体被抽到的概率为0.4

B.数据11，19，15，16，19众数是19，中位数是15

C.数据0，1，5，6，7，11，12，这组数据的第70百分位数为7

D.对于随机事件A与B，若$P\left(\overline{B}\right)=0.3$，$P\left(B|A\right)=0.7$，则事件$A$与$B$独立

10.先将函数 $f\left(x\right)=\sin x$ 图象上所有点的横坐标缩小到原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，再把图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，最后把所得图象向上平移一个单位长度，得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，则关于函数 $g\left(x\right)$，下列说法正确的是（　　）

A.最小正周期为 π

B.在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增

C. $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时 $g\left(x\right)\in\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2},2\right]$

D.其图象关于点 $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$ 对称

11.已知曲线 C： $mx^2+\left(1-m\right)y^2=1$，则以下说法正确的是（　　）

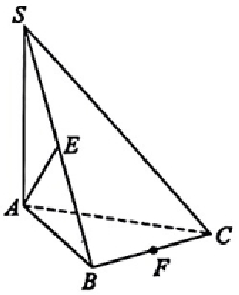
A.若曲线 C 表示焦点在 x 轴上的椭圆，则 $0<m<\frac{1}{2}$

B.若曲线 C 为焦点在 x 轴上的椭圆，则其短轴长取值范围是 $\left(2,2\sqrt{2}\right)$

C.曲线 C 为椭圆时，离心率为 $\sqrt{\frac{1-2m}{1-m}}$

D.若曲线 C 为双曲线，则渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{\frac{m}{m-1}}x$

12.《九章算术》中，将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑.如图，在四面体 $S-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle B$ 为直角，点 E，F 分别是 SB，BC 的中点，且 $AE\perp SC$，$SA=AB=2$，$SC=2\sqrt{6}$，$BC=4$，则（　　）



A. $BC\perp$ 平面 SAB

B.四面体 $S-ABC$ 是鳖臑

C. E 是四面体 $S-ABC$ 外接球球心

D.过 A、E、F 三点的平面截四面体 $S-ABC$ 的外接球，则截面的面积是 $\frac{14\pi}{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.已知圆 O： $x^2+y^2=4$，过 $M\left(1,\sqrt{3}\right)$ 作圆 O 的切线 l，则直线 l 的倾斜角为______.

14.保定某中学举行歌咏比赛，每班抽签选唱 5 首歌曲中的 1 首（歌曲可重复被抽取），则高三 1 班和高三 2 班抽到不同歌曲的概率为______.

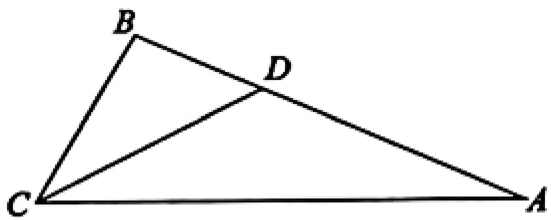
15.等差数列$\{a_n\}$前 13 项和为 91，正项等比数列$\{b_n\}$满足$b_7=a_7$，则$\log_7 b_1+\log_7 b_2+\cdots+\log_7 b_{13}=$______.

16.已知不等式$e^{-\frac{1}{a}}\geq 3ax+2b$对任意的实数$x$恒成立，则$\dfrac{b}{a}$的最大值为______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

$\triangle ABC$的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$\sqrt{3}\cos A+a\sin C=\sqrt{3}b$.

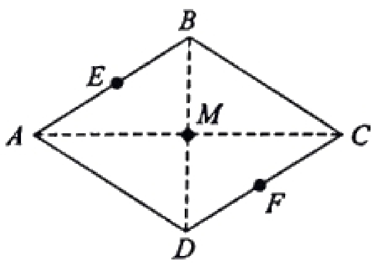


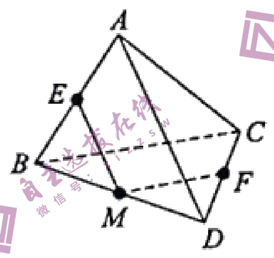
（1）求角C的大小；

（2）若$\angle ACB$的角平分线交AB于点D，$CD=4$，$AD=2DB$，求a.

18.（12 分）

在菱形$ABCD$中，$AB=2\sqrt{3}$，$\angle BCD=60°$，E，F分别为AB，CD的中点，将菱形$ABCD$沿BD折起，使$AC=AB$，M为线段BD中点.





（1）求$\angle EMF$大小；

（2）求直线AC与平面EFM所成角的大小.

19.（12 分）

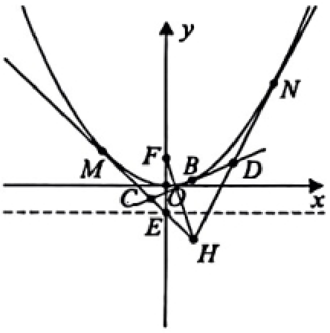
在正项数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，且$a_1a_2\cdots a_n=a_n^{\frac{n+1}{2}}$.

（1）求证：数列$\left\{\dfrac{\lg a_n}{n}\right\}$是常数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=\dfrac{a_n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}$，记数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$，求证：$\dfrac{3}{16}\leq S_n<\dfrac{1}{4}$.

20.（12 分）

已知抛物线C：$x^2=2py$（$p>0$）的焦点为F，准线交y轴于点E，点$H\left(\dfrac{p}{2},-p\right)$，若$\triangle EFH$的面积为1，过点$H$作抛物线$C$的两条切线切点分别为$M$，$N$.



（1）求p的值及直线MN的方程；

（2）点B是抛物线弧MN上一动点，点B处的切线与HM，HN分别交于点C，D，证明：$\dfrac{|MC|}{|CH|}=\dfrac{|HD|}{|DN|}$.

21.（12分）

杭州亚运会吉祥物为一组名为“江南忆”的三个吉祥物“宸宸”，“琮琮”，“莲莲”，聚焦共同的文化基因，蕴含独特的城市元素.本次亚运会极大地鼓舞了中国人民参与运动的热情.某体能训练营为了激励参训队员，在训练之余组织了一个“玩骰子赢礼品”的活动，他们来到一处训练场地，恰有20步台阶，现有一枚质地均匀的骰子，游戏规则如下：掷一次骰子，出现3的倍数，则往上爬两步台阶，否则爬一步台阶，再重复以上步骤，当队员到达第7或第8步台阶时，游戏结束.规定：到达第7步台阶，认定失败；到达第8步台阶可赢得一组吉祥物.假设平地记为第0步台阶.记队员到达第n步台阶的概率为P_n（$0\le n\le 8$），记$P_0=1$.

（1）投掷4次后，队员站在的台阶数为第X阶，求X的分布列；

（2）（ⅰ）求证：数列$\left\{P_n-P_{n-1}\right\}$（$1\le n\le 7$）是等比数列；

（ⅱ）求队员赢得吉祥物的概率.

22.（12分）

已知函数$f\left(x\right)=e^x-\dfrac{1}{2}ax^2$.

（1）若$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，求实数a的取值范围；

（2）若$f\left(x\right)$有两个极值点分别为x_1，x_2（$x_1<x_2$），当$\lambda>1$时，证明：$x_1+\lambda x_2>\lambda+1$.