长沙市名校2022届高三上学期第一次月考

数学

本试卷共8页．时量120分钟．满分150分．

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，集合 $B=\{x\mid 1\le 2^x\le 8\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{-1,1\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{0,1,2\}$　　D．$\{1,2,3\}$

★2．设复数 z 满足 $z=\dfrac{2i}{-1+i}$ 则 $|z|=$（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

★3．对具有线性相关关系的变量 x，y，测得一组数据如下：

x	2	4	5	6	8
y	20	40	60	70	80

根据上表，利用最小二乘法得它们的回归直线方程为 $\hat{y}=10.5x+a$，据此模型预测当 $x=20$ 时，y 的估计值为（　　）

A．210.5　　B．211　　C．211.5　　D．212

4．过抛物线，$y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作斜率大于0的直线 l 交抛物线于 A，B 两点（A 在 B 的上方），且 l 与准线交于点 C，若 $\overrightarrow{CB}=4\overrightarrow{BF}$，则 $\dfrac{|AF|}{|BF|}=$（　　）

A．2　　B．3　　C．$\dfrac{5}{3}$　　D．$\dfrac{5}{2}$

5．公元前3世纪，古希腊欧几里得在《几何原本》里提出：“球的体积（V）与它的直径（D）的立方成正比”，此即 $V=kD^3$，欧几里得未给出 k 的值．17世纪日本数学家们对球的体积的方法还不了解，他们将体积公式 $V=kD^3$ 中的常数 k 称为“立圆率”或“玉积率”．类似地，对于等边圆柱（轴截面是正方形的圆柱），正方体也可利用公式 $V=kD^3$ 求体积（在等边圆柱中，D 表示底面圆的直径；在正方体中，D 表示棱长）．假设运用此体积公式求得球奖（直径为 a），等边圆柱（底面圆的直径为 a），正方体（棱长为 a）的“玉积率”分别为 k_1、k_2、k_3，那么 $k_1:k_2:k_3=$（　　）

A．$\dfrac{\pi}{3}:\dfrac{\pi}{2}:2$　　B．$\dfrac{\pi}{6}:\dfrac{\pi}{4}:2$　　C．$\dfrac{\pi}{3}:\dfrac{\pi}{2}:1$　　D．$\dfrac{\pi}{6}:\dfrac{\pi}{4}:1$

6．已知 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 且 $12\cos^2\alpha+7\sin 2\alpha-4=0$，若 $\tan(\alpha+\beta)=3$，则 $\tan\beta=$（　　）

A．$-\dfrac{1}{13}$ 或 -7　　B．$-\dfrac{7}{11}$ 或 1　　C．1　　D．$-\dfrac{1}{13}$

7．某电视台的夏日水上闯关节目一共有三天，第一关与第二关的过关率分别为 $\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4}$ 只有通过前一关才能进入下一关，每一关都有两次闯关机会，且通过每关相互独立．一选手参加该

节目，则该选手能进人第三关的概率为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{5}{6}$　　C．$\frac{8}{9}$　　D．$\frac{15}{16}$

★8．已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左，右焦点分别为 F_1、F_2，过点 F_2 作倾斜角为 θ 的直线 l 交双曲线 C 的右支于 A，B 两点，其中点 A 在第一象限，若 $|AB|=|AF_1|$，且双曲线 C 的离心率为 2．则 $\cos\theta=$（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{1}{2}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分．

9．已知函数 $f(x)=3\cos(2x+\frac{\pi}{3})+1$，则下列关于 $f(x)$ 的说法正确的是（　　）

A．最大值为 4　　B．在 $(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{12})$ 上单调递减

C．$(\frac{\pi}{6},1)$ 是它的一个对称中心　　D．$x=-\frac{\pi}{6}$ 是它的一条对称轴

10．已知不等式 $x^2+ax+b>0(a>0)$ 的解集是 $\{x\,|\,x\neq d\}$，则下列四个结论中正确的是（　　）

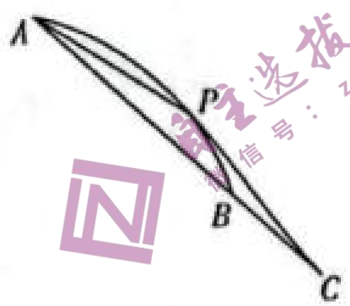
A．$a^2=4b$　　B．$a^2+\frac{1}{b}\geq 4$

C．若不等式 $x^2+ax-b<0$ 的解集为 (x_1,x_2)，则 $x_1x_2>0$

D．若不等式 $x^2+ax+b<c$ 的解集为 (x_1,x_2)，且 $|x_1-x_2|=4$，则 $c=4$

11．如图已知 P 是半径为 2，圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的一段圆弧 AB 上的一点，若 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$，则 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$ 的值可以是

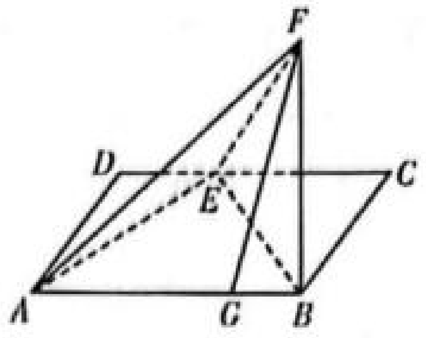
（参考数据 $\sqrt{13}\approx 3.606$）（　　）



A．-2　　B．-1　　C．0　　D．1

12．如图所示，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2,BC=1$，E 为 CD 上一动点，现将 $\triangle BEC$ 沿 BE 折起至 $\triangle BEF$，在平面 FBA 内作 $FG\perp AB$，G 为垂足．设 $CE=s,BG=t$，则下列说法

正确的是（　　）



A．若 $BF\perp$ 平面 AEF，则 $t=\dfrac{1}{2}$　　B．若 $AF\perp$ 平面 BEF，则 $s=\dfrac{2}{3}$

C．若平面 $BEF\perp$ 平面 $ABED$，且 $s=1$，则 $t=\dfrac{1}{2}$　　D．若平面 $AFB\perp$ 平面 $ABED$，且 $s=\dfrac{3}{2}$，则 $t=\dfrac{3}{4}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．若 $f\left(x\right)=\ln\left(e^{x}+1\right)+kx$ 是偶函数，则 $k=$_________.

14，已知直线 $l:mx+y-3=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 交于 A，B 两点，过 A，B 分别做 l 的垂线与 x 轴交于 C，D 两点，若 $AB=4$，则 $CD=$_________.

15．设函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-ax$，若曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处的切线经过点 $\left(2,-1\right)$，则实数 a 的值为________；$f\left(x\right)$ 在 $\left[\dfrac{1}{e},e\right]$（$e$ 为自然对数的底数，$e=2.71828\cdots$）上的最小值为_________.

16．在数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，对任意 $n\in N^*,a_n=k$，当且仅当 $2^k\le n<2^{k+1},k\in N$，若满足 $a_m+a_{2m}+a_{4m}+a_{8m}+a_{16m}\ge 52$，则 m 的最小值为_________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分 10 分）

在 $\triangle ABC$ 中内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 已知 $a=2,b=\sqrt{7}$，面积 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}ac\cos B$，求 $\cos C$ 的值．

★18．（本小题满分 12 分）

比知数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足：$a_{n+1}-2a_n=0,a_3=8$

（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\dfrac{n}{a_n}$ 数列 $\left\{b_n\right\}$ 的前 n 项和为 T_n．若 $2T_n>m-2021$ 对 $n\in N^*$ 恒成立．求正整数 m 的最大值．

19．（本小题满分 12 分）设甲、乙两位同学在高中年级上学期间，甲同学每天 6：30 之前

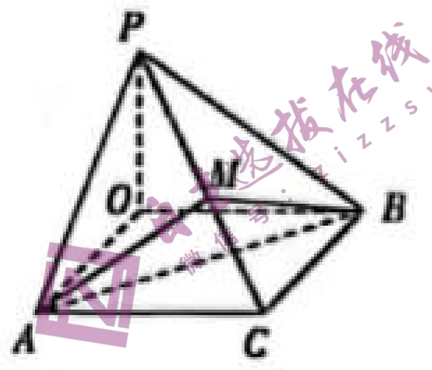
到校的概率均为$\frac{2}{3}$，乙同学每天6：30之前到校的概率均为$\frac{3}{4}$，假定甲、乙两位同学到校情况互不影响，且任一同学每天到校情况相互独立.

（1）设A为事件“上学期间的五天中，甲同学在6：30之前到校的天数为3天”，B为事件“上学期间的五天中，甲同学有且只有一次连续两天在6：30之前到校”，求在事件A发生的条件下，事件B发生的概率；

（2）甲、乙同学组成了学习互助小组后，若某天至少有一位同学在6：30之后到校，则之后的一天甲，乙同学必然同时在6：30之前到校，在上学期间的五天，随机变量Y表示甲、乙同学同时在6：30之前到校的天数，求Y的分布列与数学期望.

20.（本小题满分12分）

如图，在$\triangle ABC$中，$AC=BC=2,\angle ACB=120°$．O为$\triangle ABC$的外心，$PO\perp$平面ABC，且$PO=\sqrt{6}$.



（1）求证：　$BO//$平面PAC；

（2）设平面$PAO\cap$平面$PBC=l$；若点M在线段PC上运动，且$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$，当直线$l$与平面$ABM$所成角取最大值时，求$\lambda$的值

21.（本小题满分12分）

设椭圆$C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$长轴的左，右顶点分别为$A$，$B$.

（1）若P、Q是椭圆上关于x轴对称的两点，直线AP,BQ的斜率分别为$k_1,k_2\left(k_1k_2\neq 0\right)$，求$|k_1|+|k_2|$的最小值；

（2）已知过点$D(0,-3)$的直线l交椭圆C于M、N两个不同的点，直线AM,AN分别交y轴于点S、T，记$\overrightarrow{DS}=\lambda\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DT}=\mu\overrightarrow{DO}$（$O$为坐标原点），当直线$l$的倾斜角$\theta$为锐角时，求$\lambda+\mu$的取值范围.

22.（本小题满分12分）

已知函数$f(x)=\frac{x^2}{e^x}+\frac{1}{2}x^2-2x$（$e=2.71828\cdots$是自然对数的底数）.

（1）设$x\in[0,4]$，求$f(x)$的最小值；

（2）讨论关于x的方程$\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2+2x\right]\frac{1}{xe^x}+a=|\ln x|(a\in R)$的根的个数，

数学参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	C	C	D	D	B	A

1．C 【解析】由函数 $y=2^x$ 单调递增，不等式 $2^0\le 2^x\le 2^3$ 解得 $0\le x\le 3$，即集合 $B=\{x\,|\,0\le x\le 3\}$，则 $A\cap B=\{0,1,2\}$．故选 C.

2．B 【解析】因为 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}+1)}=1-\mathrm{i}$，所 $|z|=\sqrt{2}$．故选 B

3．C 【解析】$\overline{x}=\dfrac{2+4+5+6+8}{5}=5,\overline{y}=\dfrac{20+40+60+70+80}{5}=54$，将 $\overline{x}=5,\overline{y}=54$

代入 $y=10.5x+a$

得 $a=54-52.5=1.5$，则 $\hat{y}=10.5x+1.5$，当 $x=20$ 时，$y=10.5\times 20+1.5=211.5$，应选答案 C

4．C 【解析】分别过 A，B 作准线的垂线，垂足分别为 A_1,B_1，设 $|BF|=x,|AF|=y$，

则 $\dfrac{|BB_1|}{BC}=\dfrac{|BF|}{|BC|}=\dfrac{|AA_1|}{|AC|}$，$\therefore\dfrac{y}{y+x+4x}=\dfrac{1}{4}$，$\therefore\dfrac{|AF|}{|BF|}=\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{3}$ 故选 C.

5．D 【解析】由题意得球的体积为 $V_1=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi(\dfrac{a}{2})^3=\dfrac{\pi}{6}a^3\Rightarrow k_1=\dfrac{\pi}{6}$；

等边圆柱的体积为 $V_2=\pi R^2a=\pi(\dfrac{a}{2})^2a=\dfrac{\pi}{4}a^3\Rightarrow k_2=\dfrac{\pi}{4}$；

正方体的体积 $V_3=a^3\Rightarrow k_3=1$，所以 $k_1:k_2:k_3=\dfrac{\pi}{6}:\dfrac{\pi}{4}:1$，故选 D.

6．D【解析】由 $12\cos^2\alpha+7\sin 2\alpha-4=0$，得 $4\cos^2\alpha+7\sin\alpha\cos\alpha-2\sin^2\alpha=0$，

所以 $2\tan^2\alpha-7\tan\alpha-4=0$，求得 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$（舍），$\tan\alpha=4$.

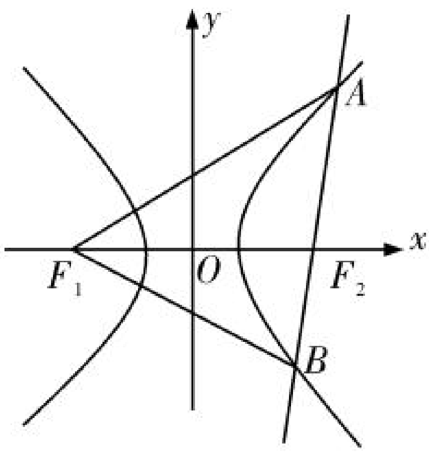
又$\because\tan\beta=\tan(\alpha+\beta-\alpha)=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(a+\beta)\tan\alpha}=\dfrac{3-\tan\alpha}{1+3\tan\alpha}$，

将 $\tan\alpha=4$ 的值代入上式可得：$\tan\beta=-\dfrac{1}{13}$．故选 D.

7．B【解析】该选手闯过第一关的概率为 $P_1=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{9}$，闯过第二关的概率为 $P_2=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{15}{16}$，所以该选手能进入第三关的概率为 $P=\dfrac{8}{9}\times\dfrac{15}{16}=\dfrac{5}{6}$．故选 B

8．A 【解析】由双曲线的定义知，$|AF_1|-|AF_2|=2a$，$\because|AB|=|AF_1|$，

$\therefore|AF_1|+|BF_2|=|AF_1|$，即 $|AF_1|-|AF_2|=|BF_2|=2a$，



$\therefore |BF_1|=|BF_2|+2a=4a$，

在$\triangle BF_1F_2$中，由余弦定理知，$\cos\theta=\dfrac{|BF_2|^2+|F_1F_2|^2-|BF_1|^2}{2|BF_2|\cdot|F_1F_2|}$，

$\therefore \cos\theta=\dfrac{4a^2+4c^2-16a^2}{2\cdot 2a\cdot 2c}=\dfrac{c^2-3a^2}{2ac}$

$\because e=\dfrac{c}{a}=2,\therefore \cos\theta=\dfrac{4-3}{4}=\dfrac{1}{4}$，故选 A．

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分．

题号	9	10	11	12
答案	AD	ABD	ABC	AC

9．AD　【解析】由$f(x)=3\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})+1$，$\therefore f(x)$的最大值为4，所以 A 正确；

因为当$x\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{12})$时，$2x+\dfrac{\pi}{3}\in(\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6})$，$f(x)$不是单调函数，所以 B 错误；

因为$(\dfrac{\pi}{6},1)$不在$y=f\left(x\right)$图象上，所以不是其对称中心，所以 C 错误；

因为$f(-\dfrac{\pi}{6})=4$为函数的最大值，所以$x=-\dfrac{\pi}{6}$对称轴，所以 D 正确，故选 AD．

10．ABD　【解析】由题意．$\triangle=a^2-4b=0$，$\therefore b=\dfrac{a^2}{4}$，所以 A 正确；

对于 B：$a^2+\dfrac{1}{b}=a^2+\dfrac{4}{a^2}\geq 2\sqrt{a^2\cdot\dfrac{4}{a^2}}=4$等号当且仅当$a^2=\dfrac{4}{a^2}$，即$a=\sqrt{2}$时成立，所以 B 正确；

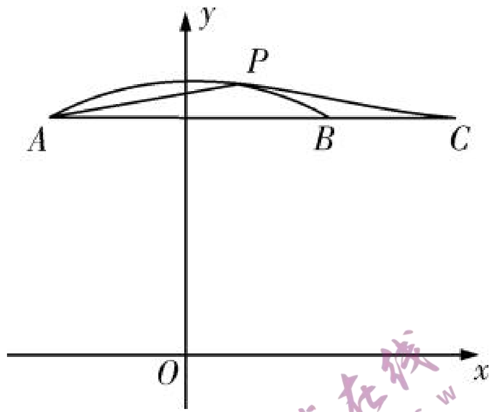
对于 C：由韦达定理，知$x_1x_2=-b=-\dfrac{a^2}{4}<0$，所以 C 错误；

对于 D：由韦达定理，知$x_1+x_2=-a,x_1x_2=b-c=\dfrac{a^2}{4}-c$，

则 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2-4(\frac{a^2}{4}-c)}=2\sqrt{c}=4$，解得 $c=4$，所以 D 正确；

故选 ABD．

11．ABC 【解析】以圆心为原点，平行 AB 的直线为 x 轴，AB 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系，



则 $A(-1,\sqrt{3}),C(2,\sqrt{3})$ 设 $P(2\cos\theta,2\sin\theta),\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{2\pi}{3}$，

则 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=(2-2\cos\theta,\sqrt{3}-2\sin\theta)\cdot(-1-2\cos\theta,\sqrt{3}-2\sin\theta)=$

$5-2\cos\theta-4\sqrt{3}\sin\theta=5-2\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$，且 $0<\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{6}<\frac{\sqrt{3}}{3},\therefore 0<\alpha<\frac{\pi}{6}$，

$\therefore\frac{\pi}{3}<\theta+\alpha<\frac{5}{6}$，

$\because$ $y=\sin(\theta+\alpha)$ 在 $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$ 递增，在 $[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6})$ 递减，

$\therefore$ 当 $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ 时，$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$ 最小值为 $5-2\sqrt{13}$，

当 $\theta=\frac{2}{3}$ 时，$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$ 的最大值为 $5-2\cos\frac{2\pi}{3}-4\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3}=0$，

则 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}\in\left[5-2\sqrt{13},0\right]$ 所以 ABC 正确，D 错误，故选 ABC

12．AC 【解析】对于 A，若 $BF\perp$ 平面 AEF，则 $BF\perp AF$，

在 $Rt\triangle BGF$ 中，$AB=2,BF=BC=1$，则 $AF=\sqrt{3},\angle ABF=60°$，

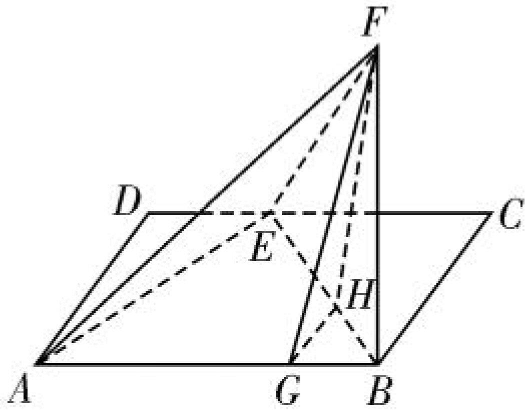
FG 是三角形的高，则 $t=BG=BF\cos 60°=\frac{1}{2}$ 所以 A 正确；

对于 B，若 $AF\perp$ 平面 BEF，则有 $AF\perp BF,AF\perp EF$，

则 $AF=\sqrt{3}$，在 $Rt\triangle AEF$ 中，$AF^2+EF^2=AE^2=AD^2+DE^2$，

即 $(\sqrt{3})^2+s^2=(2-s)^2+1^2$，解得 $s=\frac{1}{2}$，所以 B 错误；

对于 C，若平面 $BEF\perp$ 平面 $ABED$，作 $FH\perp BE$，垂足为 H，



因为平面 $BEF\cap$ 平面 $ABED=BE$，所以 $FH\perp$ 平面 $ABED$，从而 $FH\perp AB$，

又 $AB\perp FG$，所以 $AB\perp$ 平面 FHG，从而 $AB\perp HG$，

因为 $s=1$，所以在等腰直角三角形 FEB 中，$BH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以在等腰直角三角形 BGH 中，$t=BG=\dfrac{1}{2}$，所以 C 正确；

对于 D，若平面 $AFB\perp$ 平面 $ABED$，平面 $AFB\cap$ 平面 $ABED=AB$，

又 $AB\perp FG$，故 $FG\perp$ 平面 $ABED$，

所以 $FG\perp BE$，作 $FH\perp BE$，垂足为 H，

从而有 $BE\perp$ 平面 FGH，从而 $BE\perp HG$，从而有 C，H，G 三点共线，

则 $\angle CGB+\angle GCB=90°$，又 $\angle EBC+\angle GCB=90°$，

故 $\angle CGB=\angle EBC$，又 $\angle GBC=\angle BCE=90°$，

所以 $Rt\triangle CBG\sim Rt\triangle ECB$，故 $\dfrac{BG}{CB}=\dfrac{CB}{EC}$，

因为 $CB=1,s=EC=\dfrac{3}{2}$，所以 $t=BG=\dfrac{2}{3}$，所以 D 错误；故选 AC.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．$-\dfrac{1}{2}$　【解析】$\because f(x)$ 是偶函数，$\therefore f(-1)=f(1),\therefore \ln(\dfrac{1}{e}+1)-k=\ln(e+1)+k$，

$k=-\dfrac{1}{2}$ 经检验 $k=-\dfrac{1}{2}$ 符合题意，故答案为 $-\dfrac{1}{2}$.

14．$4\sqrt{2}$　【解析】圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$，圆心 $(1,2)$，半径 $r=2$，

$\because AB=4$，$\therefore$ 直线 $l:mx+y-3=0$ 过圆心 $(1,2)$，

$\therefore m+2-3=0$，$\therefore m=1$，$\therefore$ 直线 $l:x+y-3=0$，倾斜角为 $135°$，

$\because$ 过 A，B 分别做 l 的垂线与 x 轴交于 C，D 两点，$\therefore CD=\dfrac{AB}{\sin 45°}=\dfrac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4\sqrt{2}$.

15．1　$-e-\dfrac{1}{e}$　【解析】函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-ax$，则 $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，

$f^{'}(x)=\dfrac{1-\ln x-ax^2}{x^2}$.

由题设 $f^{'}(1)=\dfrac{f(1)-(-1)}{1-2}$，解得 $a=1$.

从而 $f^{'}(x)=\dfrac{(1-x^2)-\ln x}{x^2}$；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0, x>1$ 时，$f'(x)<0$.

可知 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{e},1\right]$ 单调递增．在 $[1,e]$ 上单调递减．又 $f(e)=\dfrac{1}{e}-e>f(\dfrac{1}{e})=-e-\dfrac{1}{e}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{e},e\right]$ 上的最小值为 $f(\dfrac{1}{e})=-e-\dfrac{1}{e}$.

16．512　【解析】不妨设 $2^k\le m\le 2^{k+1}, k\in N, m\in N^*$，由题意可得，$a_m=k$，

因为 $2^{k+1}\le 2m<2^{k+2}, k\in N$，所以 $a_{2m}=k+1$，

同理可得，$a_{4m}=k+2, a_{8m}=k+3, a_{16m}=k+4$，…

所以 $a_m+a_{2m}+a_{4m}+a_{8m}+a_{16m}=k+(k+1)+(k+2)+(k+3)+(k+4)=5k+10$，

因为 $a_m+a_{2m}+a_{4m}+a_{8m}+a_{16m}\ge 52$，所以 $5k+10\ge 52$，解得 $k\ge\dfrac{42}{5}$，又 $k\in N$，

所以 k 的最小值整数解为 9，故 m 的最小值为 $2^9=512$．故答案为：512.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17.【解析】由三角形面积公式 $\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}ac\cos B$，则 $\tan B=\sqrt{3}$，

$\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=60°$　　4 分

（法一）由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 得，$\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

又　由　$a=2<b=\sqrt{7}$　得　$A<B$　，　所　以　$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$　，

8 分

所以 $\cos C=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$=-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{21}}{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$　　10 分

（法二）由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=2^2+c^2-2\cdot 2c\cdot\cos 60°=(\sqrt{7})^2$，

即 $c^2-2c-3=0$，解得 $c=-1$（舍）或 $c=3$，　　8 分

由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{4+7-9}{2\times 2\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.　　10 分

18.【解析】(1) 因为数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{n+1}-2a_n=0, a_3=8$，

所以 $a_{n+1}=2a_n$，设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，可得 $q=2$， 4 分

又 $a_3=8$，即 $4a_1=8$，解得 $a_1=2$， 4 分

所以 $a_n=2^n$； 5 分

（2）$b_n=\dfrac{n}{a_n}=\dfrac{n}{2^n}$， 6 分

$T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$，

$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\dfrac{3}{2^4}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n+1}}$， 7 分

上面两式相减可得 $T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n}{2^{n+1}}=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^{n+1}}$， 8 分

化简可 $T_n=2-\dfrac{n+2}{2^n}$， 9 分

因为 $T_{x+1}-T_n=2-\dfrac{n+3}{2^{n+1}}-2+\dfrac{2+n}{2^n}=\dfrac{n+1}{2^{n+1}}>0$， 10 分

所以 $\{T_n\}$ 递增，T_1 最小，且为 $\dfrac{1}{2}$ 所以 $2\times\dfrac{1}{2}>m-2021$， 11 分

解得 $m<2022$，则 m 的最大值为 2021． 12 分

19．【解析】（1）事件 AB 包含 6 种情况；甲同学第 1、2、4 天 6：30 之前到校；甲同学第 1、2、5 天 6：30 之前到校；甲同学第 2、3、、5 天 6：30 之前到校；甲同学第 1、3、4 天 6：30 之前到校；甲同学第 1、4、5 天 6：30 之前到校；甲同学第 2、4、5 天 6：30 之前到校，故 $P(AB)=6(\dfrac{2}{3})^3(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{16}{81}$，又 $P(A)=C_5^3(\dfrac{2}{3})^3(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{80}{243}$，

所以 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{3}{5}$． 5 分

（2）随机变量 Y 的所有可能取值为 2、3、4、5．

则 $P(Y=2)=(\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{1}{8}, P(Y=3)=3(\dfrac{1}{2})^3+3(\dfrac{1}{2})^4=\dfrac{9}{16}$，

$P(Y=4)=4(\dfrac{1}{2})^4+(\dfrac{1}{2})^5=\dfrac{9}{32},(Y=5)=(\dfrac{1}{2})^5=\dfrac{1}{32}$． 10 分

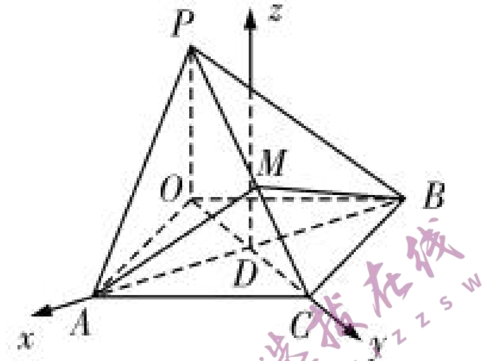
则随机变量 Y 的分布列为：

Y	2	3	4	5
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{1}{32}$

11 分

则 $E(Y)=2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{9}{16}+4\times\frac{9}{32}+5\times\frac{1}{32}=\frac{103}{32}$ 12 分

20.【解析】（1）如图，连接 OC，交 AB 于点 D，O 为 $\triangle ABC$ 的外心，



$AC=BC=2, OA=OB=OC$，所以 $\triangle OAC\cong\triangle OBC$，

所以 $\angle ACO=\angle BCO=\frac{1}{2}\angle ACB=60^\circ$

故 $\triangle OAC$ 和 $\triangle OBC$ 都为等边三角形， 3 分

即四边形 $OACB$ 为菱形，所以 $OB//AC$

又 $AC\subset$ 平面 PAC，$OB\not\subset$ 平面 PAC，所以 $BO//$ 平面 PAC． 5 分

（2）由（1）同理可知因为 $BO//$ 平面 POA，$BC\subset$ 平面 PBC，

平面 $PAO\cap$ 平面 $PBC=l$，所以 $BC//l$． 6 分

如图所示：以点 D 为原点，DA, DC，垂直平面 ABC 的直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系．

则 $A(\sqrt{3},0,0),, B(-\sqrt{3},0,0), C(0,1,0), P(0,-1,\sqrt{6}), \overrightarrow{BC}=(\sqrt{3},1,0)$．

设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$ 所以 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PM}=(\sqrt{3},2\lambda-1,\sqrt{6}(1-\lambda)), \overrightarrow{BA}=(2\sqrt{3},0,0)$

设平面 ABM 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$．

$$\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}=2\sqrt{3}x=0\\ \overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}=\sqrt{3}x+(2\lambda-1)y+\sqrt{6}(1-\lambda)z=0\end{cases}，得\begin{cases}x=0\\(2\lambda-1)y+\sqrt{6}(1-\lambda)z=0\end{cases}$$

令 $y=\sqrt{6}$ 得 $\vec{n}=(0,\sqrt{6},\frac{2\lambda-1}{\lambda-1})$． 9 分

所以直线 l 与平面 ABM 所成角 α 的正弦值为：

$$\sin\alpha=\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{BC}\right\rangle=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\sqrt{6+(2-\frac{1}{1-\lambda})^2}}\le\frac{1}{2},$$ 11 分

即当$\lambda=\frac{1}{2}$即点M是线段PC的中点时，直线l与平面ABM所成角取最大值．　　12
分

21．【解析】（1）设点$P\left(x_0,y_0\right)$，由椭圆的对称性知$Q\left(x_0,y_0\right)$，不妨令$y_0>0$，

由已知$A(-3,0),B(3,0)$，则$k_1=\frac{y_0}{x_0+3},k_2=\frac{-y_0}{x_0-3}$，显然有$-3<x_0<3$，

2分

则$|k_1|+|k_2|=\frac{y_0}{3+x_0}+\frac{y_0}{3-x_0}=\frac{6y_0}{9-x_0^2}$，

$\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{5}=1\Rightarrow 9-x_0^2=\frac{9y_0^2}{5}$，则$|k_1|+|k_2|=\frac{10}{3y_0}$，　　4分

因$0<y_0\le\sqrt{5}$，所以$|k_1|+|k_2|=\frac{10}{3y_0}\ge\frac{2\sqrt{5}}{3}$，

当且仅当$y_0=\sqrt{5}$时等号成立，即$|k_1|+|k_2|$的最小值为$\frac{2\sqrt{5}}{3}$．　　5分

（2）当直线l的倾斜角θ为锐角时，设$M\left(x_1,y_1\right)$、$N\left(x_2,y_2\right)$，设直线$l:y=kx-3,(k>0)$，

由$\begin{cases}y=kx-3\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\end{cases}$得$(5+9k^2)x^2-54kx+36=0$，

从而$\Delta=(54k)^2-4\times36\times(5+9k^2)>0$，又$k>0$，得$k>\frac{2}{3}$，

所以$x_1+x_2=\frac{54k}{9k^2+5},x_1x_2=\frac{36}{9k^2+5}$，　　6
分

又直线AM的方程是：$y=\frac{y_1}{x_1+3}(x+3)$，令$x=0$，解得$y=\frac{3y_1}{x_1+3}$，所以点S为$\left(0,\frac{3y_1}{x_1+3}\right)$；

直线AN的方程是：$y=\frac{3y_2}{x_2+3}(x+3)$，同理点$T$为$\left(0,\frac{3y_2}{x_2+3}\right)$．

所以$\overrightarrow{DS}=\left(0,\frac{3y_1}{x_1+3}+3\right),\overrightarrow{DT}=\left(0,\frac{3y_2}{x_2+3}+3\right),\overrightarrow{DO}=(0,3)$，

因为$\overrightarrow{DS}=\lambda\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DT}=\mu\overrightarrow{DO}$，所以$\frac{3y_1}{x_1+3}+3=3\lambda,\frac{3y_2}{x_2+3}+3=3\mu$，

8分

所以

$$\lambda+\mu=\frac{y_1}{x_1+3}+\frac{y_2}{x_2+3}+2=\frac{kx_1-3}{x_1+3}+\frac{kx_2-3}{x_2+3}+2=\frac{2kx_1x_2+3(k-1)(x_1+x_2)-18}{x_1x_2+3(x_1+x_2)+9}+2$$

$$=\frac{2k\cdot\frac{36}{9k^2+5}+3(k-1)\left(\frac{54k}{9k^2+5}\right)-18}{\frac{36}{9k^2+5}+3\times\left(\frac{54k}{9k^2+5}\right)+9}+2=-\frac{10}{9}\times\frac{k+1}{k^2+2k+1}+2$$

$=-\frac{10}{9}\times\frac{(k+1)}{(k+1)^2}+2=-\frac{10}{9}\times\frac{1}{k+1}+2$ ……11 分

$\because k>\frac{2}{3}$，$\therefore \lambda+\mu\in\left(\frac{4}{3},2\right)$，

综上，所以 $\lambda+\mu$，的范围是 $\left(\frac{4}{3},2\right)$. 12 分

22.【解析】(1) 由题意可求得 $f'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}+x-2=\frac{(x-2)(e^x-x)}{e^x}$， 1 分

因为 $e^x\geq x+1>x, x\in[0,4]$，当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)\leq 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，

当 $x\in(2,4)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(2,4)$ 上单调递增， 3 分

所以 $x\in[0,4]$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(2)=\frac{4}{e^2}-2$. 4 分

(2) 设 $h(x)=|\ln x|-\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2+2x\right]\frac{1}{xe^x}-a=|\ln x|-\frac{x}{e^{2x}}-a, x\in(0,+\infty)$，

令 $y=\frac{x}{e^{2x}}$，则 $y'=\frac{1-2x}{e^{2x}}$，

所以 $y=\frac{x}{e^{2x}}$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上递增，在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 递减. 5 分

(i) 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x>0$，则 $h(x)=\ln x-\frac{x}{e^{2x}}-a$，

所以 $h'(x)=e^{-2x}(\frac{e^{2x}}{x}+2x-1)$. 因为 $2x-1>0, \frac{e^{2x}}{x}>0$，所以 $h'(x)>0$，

因此 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 7 分

(ii) 当 $x\in(0,1)$ 时，$\ln x<0$，则 $h(x)=-\ln x-\frac{x}{e^{2x}}-a$，则 $h'(x)=e^{-2x}(-\frac{e^{2x}}{x}+2x-1)$.

因为 $e^{2x}\in(1,e^2), e^{2x}>1, 0<x<1, \therefore\frac{e^{2x}}{x}>1$，即 $-\frac{e^{2x}}{x}<-1$，又 $2x-1<1$，

所以 $h'(x)=e^{-2x}(-\frac{e^{2x}}{x}+2x-1)<0$，因此 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

综合(i)(ii)可知，当 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时，$h(x)\geq h(1)=-\frac{1}{e^2}-a$， 5

分

当 $h(1)=-e^{-2}-a>0$，即 $a<-\frac{1}{e^2}$ 时，$h(x)$）没有零点，故关于 x 的方程根的个数为 0，

当 $h(1)=-e^{-2}-a=0$，即 $a=-\frac{1}{e^2}$ 时，$h(x)$ 只有一个零点，

故关于 x 的方程根个数为 1， 7 分

当 $h(1)=-e^{-2}-a<0$，即 $a>-\frac{1}{e^2}$ 时，①当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，

$h(x)=\ln x-\frac{x}{e^{2x}}-a>\ln x-(\frac{1}{e^2}+a)>\ln x-1-a$，

要使 $h\left(x\right)>0$，可令 $\ln x-1-a>0$，即 $x\in\left(e^{1+a},+\infty\right)$； 9

分

②当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$h(x)=-\ln x-\frac{x}{e^{2x}}-a\geq-\ln x-(\frac{1}{2}e^{-1}+a)>-\ln x-1-a$，

要使 $h\left(x\right)>0$，可令 $-\ln x-1-a>0$，即 $x\in\left(0,e^{-1-a}\right)$，所以当 $a>-\frac{1}{e^2}$ 时，

$h\left(x\right)$ 有两个零点，故关于 x 的方程根的个数为 2， 11

分

综上所述：当 $a<-\frac{1}{e^2}$ 时，关于 x 的方程根的个数为 0，当 $a=-\frac{1}{e^2}$ 时，关于 x 的方程根的个数为 1，

当 $a>-\frac{1}{e^2}$ 时，关于 x 的方程根的个数为 2． 12 分