2024年普通高等学校招生全国统一考试
高三第一次联合诊断检测　数学

数学测试卷共4页，满分150分。考试时间120分钟。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

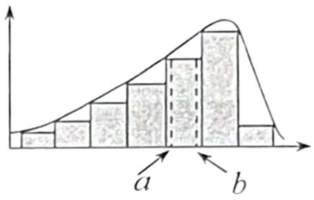
1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{x|2x^2-11x+12<0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1,2\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{4,5\}$

2. 已知复数 $z=a+bi$，若 $\overline{z}=i\cdot z$，则

A. $a+b=0$　　B. $a-b=0$　　C. $ab=0$　　D. $ab=1$

3. 对一个样本进行统计后得到频率分布直方图如图所示，并由此估计总体集中趋势，则 a,b 可以分别大致反映这组数据的



A. 平均数，中位数　　B. 平均数，众数

C. 中位数，平均数　　D. 中位数，众数

4. 若 $4\cos^2\alpha+\sin(\pi+2\alpha)=2$，则 $\tan 2\alpha=$

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

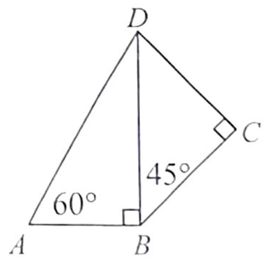
5. 在经济学中，常用 Logistic 回归模型来分析还款信度评价问题．某银行统计得到如下 Logistic 模型：$P(x)=\frac{e^{-0.97+0.127x}}{1+e^{-0.97+0.127x}}$，其中 x 是客户年收入（单位：万元），$P(x)$ 是按时还款概率的预测值．如果某人年收入是10万元，那么他按时还款概率的预测值大约为（参考数据：$\ln 1.35\approx 0.3$）

A. 0.35　　B. 0.46　　C. 0.57　　D. 0.68

6. 已知 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(a-bx)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为

A. $y=2x$　　B. $y=x$　　C. $y=0$　　D. $y=-2x$

7. 将一副三角板拼接成平面四边形 $ABCD$（如图），$BC=1$，将其沿 BD 折起，使得面 $ABD\perp$ 面 BCD，若三棱锥 $A-BCD$ 的顶点都在球 O 的球面上，则球 O 的表面积为



A. 2π　　B. $\frac{7\pi}{3}$

C. $\frac{8\pi}{3}$　　D. 3π

8. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)-2$，$f(1)=4$ 且当 $x>0$ 时，$f(x)>2$，若存在 $x\in[1,2]$，使得 $f(ax^2-4x)+f(2x)=1$，则 a 的取值范围是

A. $(0,\frac{1}{2}]$　　B. $[\frac{1}{2},\frac{5}{8}]$　　C. $[\frac{5}{8},\frac{2}{3}]$　　D. $[\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列函数中，其图象关于点$(\frac{\pi}{6}, 0)$对称的是

A. $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$　　B. $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

C. $y=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$　　D. $y=\tan(2x+\frac{\pi}{6})$

10. 已知椭圆E_1：$x^2+4y^2=a^2\ (a>0)$和E_2：$y^2+4x^2=4a^2\ (a>0)$，则

A. E_1与E_2的长轴长相等　　B. E_1的长轴长与E_2的短轴长相等

C. E_1与E_2的离心率相等　　D. E_1与E_2有4个公共点

11. 已知三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$，D，E，F分别是棱AB，BC，CA的中点，记三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积为V，则

A. 棱锥A_1-DEF的体积为$\frac{1}{24}V$

B. 棱锥A_1-ADEF的体积为$\frac{1}{6}V$

C. 多面体A_1B_1ABEF的体积为$\frac{5}{12}V$

D. 多面体$A_1B_1C_1DEF$的体积为$\frac{2}{3}V$

12. 若不相等的两个正数a，b满足$a^2+b^2+ab=a+b$，则

A. $a+b>1$　　B. $a+b<\frac{4}{3}$

C. $ab>\frac{1}{3}$　　D. $ab<\frac{1}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 一个袋子中有5个大小相同的球，其中有编号为1，2的黑球和编号为1，2，3的白球，从中随机取出两个球，在取出的球颜色不同的条件下，球的编号之和为奇数的概率为________.

14. 若向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，若$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的夹角为锐角，则$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$的取值范围是________.

15. 记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_n=2a_n+\lambda$，且$S_6=252$，则$\lambda=$________.

16. 已知F_1，F_2分别是双曲线C：$x^2-y^2=a^2\ (a>0)$的左、右焦点，过F_2作一直线交C于M，N两点，若$\angle MF_2F_1=120°$，且$\triangle MNF_1$的周长为1，则C的焦距为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知数列$\{a_n\}$是等差数列，且$a_5=1$，$a_8+a_{10}=-2$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）$[x]$表示不超过x的最大整数，如$[1.7]=[1]=1$，$[-1.5]=[-2]=-2$．若$b_n=2^{[a_n]}$，T_n是数列$\{b_n\}$的前n项和，求$[T_{11}]$.

18.（12 分）

2024 年 1 月 18 日是中国传统的“腊八节”，“腊八”是中国农历十二月初八（即腊月初八）这一天．腊八节起源于古代祭祀祖先和神灵的仪式，后逐渐成为民间节日，盛行于中国北方．为调查不同年龄人群对“腊八节”民俗文化的了解情况，某机构抽样调查了某市的部分人群.

（1）在100名受调人群中，得到如下数据：

年龄	了解程度	
	不了解	了解
30 岁以下	16	24
50 岁以上	16	44

根据小概率值$\alpha=0.1$的χ^2独立性检验，分析受调群体中对“腊八节”民俗的了解程度是否存在年龄差异；

（2）调查问卷共设置10个题目，选择题、填空题各5个．受调者只需回答8个题：其中选择题必须全部回答，填空题随机抽取3个进行问答．某位受调者选择题每题答对的概率为0.8，知道其中3个填空题的答案，但不知道另外2个的答案．求该受调者答对题目数量的期望.

参考公式：① $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

独立性检验常用小概率值和相应临界值：

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

②随机变量X，Y的期望满足：$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

19.（12 分）

在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a, b, c，已知$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{\cos A}$.

（1）求$\tan A$；

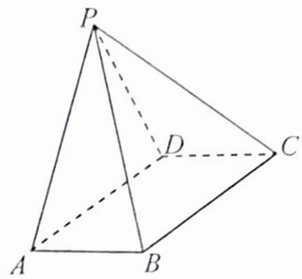
（2）若$\cos B\cos C=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$a=1$，求$b^2+c^2$.

20.（12 分）

如图，四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为平行四边形，$AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，$\angle BAD=45^\circ$，$PA=PD$.

（1）证明：$PB\perp BC$；

（2）若$PA=3$，$PC=\sqrt{13}$，求二面角$A-PB-C$的余弦值.



21.（12 分）

已知$A(2，2)$，B，C是抛物线E：$x^2=2py$上的三点，且直线AB与直线AC的斜率之和为0.

（1）求直线BC的斜率；

（2）若直线AB，AC均与圆M：$x^2+(y-2)^2=r^2(0<r<\sqrt{3})$相切，且直线$BC$被圆$M$截得的线段长为$\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$，求$r$的值.

22.（12 分）

已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x+(1-a)x-\ln ax$.（e 为自然对数的底数）

（1）当$a=1$时，证明$f(x)$存在唯一的极小值点x_0，且$f(x_0)>2$；

（2）若函数$f(x)$存在两个零点，记较小的零点为x_1，s是关于x的方程$\ln(1+x)-\cos x=ax_1-2$的根，证明：$s>x_1$.