2024届高三第五次大联考试卷

数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合、常用逻辑用语、不等式、函数、导数及其应用、三角函数及解三角形（含三角恒等变换）、平面向量、复数、数列、立体几何（含空间向量）（约50%），直线与圆、圆锥曲线（约50%）。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\left\{x \middle| -2<x<\frac{1}{2}\right\}$，$B=\{x|x(3x+8)\leqslant 3\}$，则 $A\cup B=$

A. $\left(-2,\frac{1}{3}\right)$　　B. $\left(-2,\frac{1}{3}\right]$　　C. $\left[-3,\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$

2. 已知 $a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R}$，且 $\frac{a+3i}{1+bi}=1+2i$，则 $|a+bi|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{10}$　　D. 10

3. 已知直线 $mx+2y+m+2=0$ 与直线 $4x+(m+2)y+2m+4=0$ 平行，则 m 的值为

A. 4　　B. -4　　C. 2或-4　　D. -2或4

4. 在$\triangle ABC$中，点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，点 E 满足 $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$，若 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{BE}+y\overrightarrow{BC}$，则 $x+y=$

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{2}$

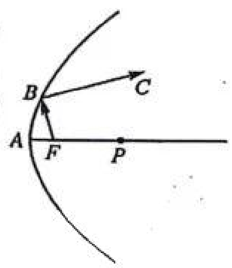
5. 设 F_1,F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{18}=1$ 的两个焦点，点 P 是 C 上的一点，且 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{1}{3}$，则$\triangle PF_1F_2$的面积为

A. 3　　B. 9　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $9\sqrt{2}$

6. 若 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=$

A. $5\sqrt{3}-6$　　B. $5\sqrt{3}+6$　　C. $\frac{5\sqrt{3}-6}{3}$　　D. $\frac{5\sqrt{3}+6}{3}$

7. 圆锥曲线具有光学性质，如双曲线的光学性质是：从双曲线的一个焦点发出的光线，经过双曲线反射后，反射光线是发散的，其反向延长线会经过双曲线的另一个焦点，如图，一个镜面的轴截面图是一条双曲线的部分，AP 是它的一条对称轴，F 是它的一个焦点，一光线从焦点 F 发出，射到镜面上点 B，反射光线是 BC，若 $\angle PFB=105^\circ$，$\angle FBC=90^\circ$，则该双曲线的离心率等于



A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}+1$　　D. $\sqrt{3}+1$

8. 若 $a=\ln 4$，$b=\frac{3}{2}$，$c=\sin\frac{3}{4}+\tan\frac{3}{4}$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $a<b<c$　　　　B. $b<a<c$

C. $a<c<b$　　　　D. $c<a<b$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知直线 l 经过点 $(2,3)$，且点 $A(-3,2)$，$B(5,-4)$ 到直线 l 的距离相等，则直线 l 的方程可能为

A. $4x-y-5=0$　　　　B. $4x+y-11=0$

C. $3x+4y-18=0$　　　　D. $3x-4y+6=0$

10. 已知圆 $O: x^2+y^2=4$ 与圆 $C: (x-3)^2+(y-2)^2=9$ 交于 A，B 两点，则下列说法正确的是

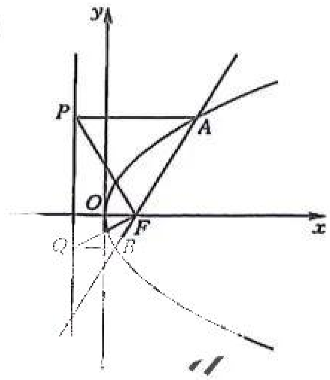
A. 线段 AB 的垂直平分线所在的直线方程为 $2x-3y=0$

B. 直线 AB 的方程为 $3x+2y-4=0$

C. $|AB|=\frac{6\sqrt{13}}{13}$

D. 若点 P 是圆 O 上的一点，则 $\triangle PAB$ 面积的最大值为 $\frac{24+12\sqrt{13}}{13}$

11. 如图，抛物线 $C: y^2=8x$ 的焦点为 F，过 F 的直线交 C 于 A，B 两点，过 A，B 分别作 C 的准线的垂线，垂足分别为 P，Q，则下列说法正确的是



A. 若 $|AB|=10$，则直线 AB 的方程为 $x-2y-2=0$ 或 $x+2y-2=0$

B. $PF\perp QF$

C. 以线段 AF 为直径的圆与 y 轴相切

D. $|PQ|^2=4|AF|\,|BF|$

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，恒有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$，且 $f(1)=\frac{1}{2}$，则下列说法正确的是

A. $f(0)=0$

B. $f(x)$ 为偶函数

C. $f(x)+f(0)\geqslant 0$

D. $\sum\limits_{i=1}^{37} f(i)=\frac{1}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 过点 $P(3,-1)$ 且与圆 $C: x^2+y^2-2x-6y+6=0$ 相切的直线方程为________.

14. 若点 P 是双曲线 $C: \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 右支上的一点，点 A 是圆 $E: x^2+(y-5)^2=1$ 上的一点，点 B 是圆 $F: (x+5)^2+y^2=1$ 上的一点，则 $|PA|+|PB|$ 的最小值为________.

15. 古希腊著名数学家阿波罗尼斯发现：平面内到两个定点距离之比为定值 $\lambda(\lambda>0$ 且 $\lambda\neq 1)$ 的点的轨迹是圆，此圆被称为“阿波罗尼斯圆”. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(3,0)$，圆 $C: (x-7)^2+(y+6)^2=r^2\ (r>0)$，若圆 C 上存在点 P，使得 $|PA|=2|PO|$，则 r 的取值范围是________.

16. 已知 $A\left(-1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，$B\left(1,-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，$P(x_0,y_0)$ 是椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 上不同的三点，直线 $l: x=3$，直线 PA 交 l 于点 M，直线 PB 交 l 于点 N，记 $\triangle PAB$，$\triangle PMN$ 的面积分别为 S_1，S_2，若 $S_1=S_2$，则 $x_0=$________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$2\sqrt{3}ac\sin B=(b+c+a)(b+c-a)$.

(1)求角A的大小；

(2)若$\sin C=4\sin B$，$a=\sqrt{13}$，求$\triangle ABC$的面积.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=2a_n-3n+4$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)记$b_n=|a_n-n|$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

19.（本小题满分 12 分）

已知A,B是双曲线$E:x^2-\frac{y^2}{2}=1$上的两点，点$P(-1,2)$是线段AB的中点.

(1)求直线AB的方程；

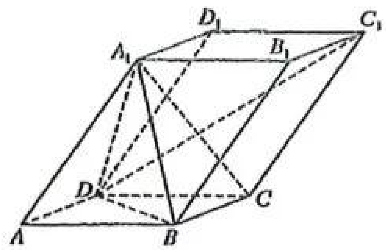
(2)若线段AB的垂直平分线与E相交于C,D两点，证明：A,B,C,D四点共圆.

20.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面是边长为 2 的菱形，且 $\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=60^\circ$，$A_1A=3$.

(1)求证：平面 $A_1BD\perp$ 平面 $ABCD$；

(2)求直线 DC_1 与平面 A_1DC 所成角的正弦值.



21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A,B，其离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，点 P 是 C 上的一点（不同于 A,B 两点），且 $\triangle PAB$ 面积的最大值为 $3\sqrt{3}$.

(1)求 C 的方程；

(2)若点 O 为坐标原点，直线 AP 交直线 $x=4$ 于点 G，过点 O 且与直线 BG 垂直的直线记为 l，直线 BP 交 y 轴于点 E，直线 BP 交直线 l 于点 F，试判断 $\left|\frac{BE}{BF}\right|$ 是否为定值？若是，则求出该定值；若不是，请说明理由.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^{2x}-ax^2(a>0)$.

(1)若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线方程；

(2)若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在极大值点 x_0，求证：$f(x_0)<\frac{a}{4}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服

务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。