永州市2024年高考第二次模拟考试

数学参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	B	D	C	B	D	D

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分．

题号	9	10	11	12
答案	BCD	BD	ACD	ABD

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．把答案填在答题卡中对应题号后的横线上.

13．$-\frac{4}{3}$　　14．$\frac{2}{5}$　　15．$\frac{e^2}{4}$　　16．1785

部分小题提示解析 ：

8．解：因为 $f(x)=\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+a|}(a>0)$，所以 $f(-a-x)=\sqrt{|x+a|}+\sqrt{|x|}=f(x)$，即 $f(x)$ 关于直线 $x=-\frac{a}{2}$ 对称，所以 $f(x)$ 为轴对称函数.

关于直线 $x=-\frac{a}{2}$ 对称，只需研究 $x\geq-\frac{a}{2}$ 性质， $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}+\sqrt{x+a},-\frac{a}{2}\leq x<0\\ \sqrt{x}+\sqrt{x+a}, \quad 0\leq x\end{cases}$

当 $-\frac{a}{2}\leq x<0$ 时， $f(x)=\sqrt{-x}+\sqrt{x+a}$，易知 $f(x)>0$

所以 $f^2(x)=\left(\sqrt{-x}+\sqrt{x+a}\right)^2=2+2\sqrt{-x^2-ax}$，故 $f^2(x)$ 在 $-\frac{a}{2}\leq x<0$ 单调递减

所以当 $-\frac{a}{2}\leq x<0$ 时， $f(x)$ 单调递减，故B错.

当 $x\geq0$ 时， $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+a}$，此时 $f(x)$ 单调递增，而 $f\left(-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{2a}$

所以 $f(x)=b$ 有三解，则 $b=\sqrt{2a}$

又因为 $f(b)=\sqrt{b}+\sqrt{b+a}=b$，联立解得 $a=128$， $b=16$，所以C错误.

要 $f(x)=2$ 有四个解，则 $\sqrt{a}<2<\sqrt{2a}$，解得 $a\in(2,4)$，故选D.

16．解：由已知可得， $a_{4k}+a_{4k+1}=k^2$， $a_{4k+1}+a_{4k+2}=0$， $a_{4k+2}+a_{4k+3}=-(k^2+k+\frac{1}{4})$，

$a_{4k+3}+a_{4k+4}=0$，则 $a_{4k+4}-a_{4k}=k+\frac{1}{4}$，则由累加法可得

$a_{240}=(a_{240}-a_{236})+(a_{236}-a_{232})+\cdots+(a_8-a_4)+a_4=1785$.

四、解答题：本大题共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．解析：

（1）当 $n=1$ 时，$a_1=2a_1-2$，则 $a_1=2$ ……………………………………………1 分

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=2a_n-2a_{n-1}$，则 $a_n=2a_{n-1}$ ……………………………………………3 分

则数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为公比的等比数列，则 $a_n=2^n$． ……………………………………………5 分

（2）因为 $b_n=\begin{cases}2^n,\ (n=2k,k\in\mathbf{N}^*)\\ n,\ (n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*)\end{cases}$ ……………………………………………6 分

所以 $T_{2n+1}=2^2+2^4+2^6+\cdots+2^{2n}+1+3+5+\cdots+(2n+1)$，……………………………8 分

则 $T_{2n+1}=\dfrac{4(1-4^n)}{1-4}+\dfrac{(n+1)(1+2n+1)}{2}=\dfrac{4^{n+1}-4}{3}+(n+1)^2$． ……………………………10 分

18．解析：

（1）因为 $a\sin A+b\sin B-c\sin C=2a\sin A\sin B$

由正弦定理可得：$a^2+b^2-c^2=2ab\sin A$ ……………………………………………1 分

由余弦定理可得：$\cos C=\sin A$ ……………………………………………2 分

解得 $A=\dfrac{\pi}{2}-C$ 或 $A=\dfrac{\pi}{2}+C$（一个答案一分） ……………………………………………3 分

又因为 B 为锐角，所以 $A-C=\dfrac{\pi}{2}$ ……………………………………………4 分

所以 $\sin(A-C)=1$． ……………………………………………6 分

（2）由（1）得 $\sin A\sin B=\sin A\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2A\right)=-\sin A\cos 2A=2\sin^3 A-\sin A$………7 分

令 $t=\sin A$，则 $\sin A\sin B=f(t)=2t^3-t$ ……………………………………………8 分

因为 $\dfrac{\pi}{2}<A<\dfrac{3\pi}{4}$，所以 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<t<1$ ……………………………………………9 分

所以 $f'(t)=6t^2-1$，当 $t\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，$f'(t)>0$，$f(t)$ 单调递增 ………10 分

所以 $t\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ 时，$f(t)\in(0,1)$，所以 $f(t)$ 无最值 ……………………………11 分

所以 $\sin A\sin B$ 无最值． ……………………………………………12 分

19．解析：

（1） 因为 $AE\,/\!/\,CD$，$AE\perp AC$，所以 $CD\perp AC$ ……………………………………………1 分

又因为平面 $ACDE\perp$ 平面 ABC，平面 $ACDE\cap$ 平面 $ABC=AC$ ……………………2 分

所以 $CD\perp$ 平面 ABC ……………………………………………3 分

又因为 $AB\subset$ 平面 ABC

所以 $AB\perp CD$． ……………………………………………4 分

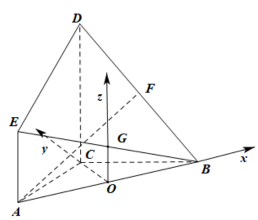
（2）取 AB、BE 的中点分别为 O、G，连接 OC、OG

所以 $OG\,/\!/\,AE$

因为 $AE\,/\!/\,CD$，所以 $OG\,/\!/\,CD$

而 $CD\perp$ 平面 ABC，所以 $OG\perp$ 平面 ABC

因为 $AC=BC$，$OA=OB$



所以 $AB\perp OC$ ....5 分

以 O 为坐标原点，分别以直线 OB，OC，OG 为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 ....6 分

设 $B(t,0,0)$，则 $A(-t,0,0)$，$C\left(0,\sqrt{4-t^2},0\right)$，$D\left(0,\sqrt{4-t^2},2\right)$，$F\left(\frac{t}{2},\frac{\sqrt{4-t^2}}{2},1\right)$

所以 $\overrightarrow{AF}=\left(\frac{3t}{2},\frac{\sqrt{4-t^2}}{2},1\right)$，易知 $\vec{n}=(0,1,0)$ 是平面 ABE 的一个法向量 ....7 分

所以 $\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AF},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{AF}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AF}\right|\left|\vec{n}\right|}\right|=\frac{\frac{\sqrt{4-t^2}}{2}}{\sqrt{\frac{9t^2}{4}+\frac{4-t^2}{4}+1}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$，解得 $t=\sqrt{3}$ ....8 分

设 $\vec{m}=(x,y,z)$ 是平面 $ACDE$ 的一个法向量，因为 $\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{3},1,0\right)$，$\overrightarrow{CD}=(0,0,2)$

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0\\ z=0\end{cases}$ ....9 分

令 $x=\sqrt{3}$，则 $\vec{m}=\left(\sqrt{3},-3,0\right)$ ....10 分

又因为 $\overrightarrow{AB}=\left(2\sqrt{3},0,0\right)$

则点 B 到平面 $ACDE$ 的距离为 $d=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\vec{m}\right|}=\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3+9}}=\sqrt{3}$ ....11 分

所以 $V_{B-ACDE}=\frac{1}{3}\times\frac{(1+2)}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$． ....12 分

20．解析：

（1）依题意可得，随机变量 $X\in\{3,5,7,9\}$ ....1 分

设甲、乙在一局比赛中得 3 分的概率为 P，则 $P=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$，...2 分

则 $P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，$P(X=5)=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$ ....3 分

$P(X=7)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$，$P(X=9)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ ....4 分

则分布列：

X	3	5	7	9
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

数学期望 $E(X)=3\times\frac{1}{8}+5\times\frac{3}{8}+7\times\frac{3}{8}+9\times\frac{1}{8}=6$． ....5 分

（2）设在甲参加的 $2n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 局禁毒知识挑战赛中，获胜局数为 Y

则所获总分为$3Y+(2n-Y)=2Y+2n$，若$2Y+2n>4n$，则$Y>n$ ....6 分

则$p_1=P(Y>n)$，因为$p(Y>n)=p(Y<n)$ ....7 分

则$p_1=\dfrac{1-P(Y=n)}{2}=\dfrac{1-C_{2n}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}}{2}$ ....8 分

同理可得$p_2=\dfrac{1-C_{2n+2}^{n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+2}}{2}$ ....9 分

则$p_1-p_2=C_{2n+2}^{n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+3}-C_{2n}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+1}\left(\dfrac{1}{4}C_{2n+2}^{n+1}-C_{2n}^{n}\right)$ ....10 分

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\left(\frac{(2n+2)!}{4(n+1)!(n+1)!}-\frac{(2n)!}{n!n!}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\left[\frac{(2n)!\left[(2n+2)(2n+1)-4(n+1)^2\right]}{4(n+1)!(n+1)!}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\left[\frac{(2n)!(-2n-2)}{4(n+1)!(n+1)!}\right]<0$$ ....11 分

故$p_1<p_2$． ....12 分

21．解析：

（1）易知当M与椭圆的短轴的端点重合时$\triangle MF_1D$面积有最大值 ....1 分

所以$\dfrac{1}{2}|F_1D|b=3\sqrt{3}$，即$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3c}{2}\times b=3\sqrt{3}$ ....2 分

因为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，$a^2=b^2+c^2$ ....3 分

解得$a=4$，$b=2\sqrt{3}$，$c=2$

所以椭圆C得方程为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$． ....4 分

（2）设$M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，$P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$

则直线MP的方程为$x=\dfrac{x_1-1}{y_1}y+1$ ....5 分

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1\\ x=\dfrac{x_1-1}{y_1}y+1\end{cases}$联立得：$\dfrac{17-2x_1}{y_1^2}y^2+\dfrac{2x_1-2}{y_1}y-15=0$ ....6 分

则$y_1y_3=\dfrac{-15y_1^2}{17-2x_1}$，即$y_3=\dfrac{-15y_1}{17-2x_1}$ ....7 分

代入直线得：$x_3=\dfrac{32-17x_1}{17-2x_1}$

同理可得：$x_4=\dfrac{32-17x_2}{17-2x_2}$，$y_4=\dfrac{-15y_2}{17-2x_2}$ ....8 分

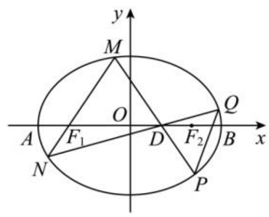
所以 $k_2=\dfrac{y_4-y_3}{x_4-x_3}=\dfrac{17(y_1-y_2)+2(x_1y_2-x_2y_1)}{15(x_1-x_2)}$ ....9 分

又因为 N、F_1、M 三点共线，所以 $\dfrac{y_1}{x_1+2}=\dfrac{y_2}{x_2+2}$

即 $x_1y_2-x_2y_1=2(y_1-y_2)$ ....10 分

所以 $k_2=\dfrac{21(y_1-y_2)}{15(x_1-x_2)}=\dfrac{7}{5}k_1$ ....11 分

所以存在实数 $\lambda=-\dfrac{7}{5}$ 使得 $\lambda k_1+k_2=0$． ....12 分



22．解析：

（1）要使 $f(x)$ 有意义，则需满足 $1+ax>0$

当 $a\ge 0$ 时，由 $1+ax>0$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 恒成立

当 $a<0$ 时，由 $1+ax>0$，得 $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{a}\right)$，由 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\subseteq\left(-\infty,-\dfrac{1}{a}\right)$

解得 $-\dfrac{2}{\pi}<a<0$ ....1 分

$f'(x)=\cos x-\dfrac{a}{1+ax}=\dfrac{(1+ax)\cos x-a}{1+ax}$ ....2 分

令 $g(x)=(1+ax)\cos x-a$，$g(0)=1-a$

当 $-\dfrac{2}{\pi}<a\le 0$ 时，$g(x)>0$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 恒成立，则 $f'(x)>0$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 恒成立

所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 单调递增，所以 $f(x)\ge f(0)=0$ 恒成立 ....3 分

当 $a>0$ 时，$g'(x)=a\cos x-(1+ax)\sin x$，令 $h(x)=g'(x)$

则 $h'(x)=-2a\sin x-(1+ax)cosx$

则 $h'(x)\le 0$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 恒成立，所以 $h(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 单调递减

又因为 $h(0)=a>0$，$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\left(1+\dfrac{\pi a}{2}\right)<0$，所以 $\exists\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $h(\alpha)=0$

当 $x\in[0,\alpha)$，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,\alpha)$ 单调递增

当 $x\in\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 单调递减 ....4 分

①若 $0<a\le 1$ 时，$g(0)=1-a\ge 0$，所以 $x\in[0,\alpha]$ 时，$g(x)>0$，又 $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-a<0$

所以 $\exists\beta\in\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $g(\beta)=0$，当 $x\in[0,\beta)$，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$

$f(x)$在$[0,\beta)$单调递增，当$x\in\left(\beta,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$g(x)<0$，即$f'(x)<0$

$f(x)$在$\left(\beta,\dfrac{\pi}{2}\right]$单调递减，又因为$f(0)=0$，所以要使$f(x)\geq 0$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$恒成立

只需$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(1+\dfrac{\pi a}{2}\right)\geq 0$，解得$a\leq\dfrac{2(\mathrm{e}-1)}{\pi}$，而$\dfrac{2(\mathrm{e}-1)}{\pi}>1$

所以$0<a\leq 1$ ....5 分

②当$a>1$时，$g(0)=1-a<0$，又$g(x)$在$[0,\alpha)$单调递增，所以一定$\exists\gamma<\alpha$使$x\in[0,\gamma)$时，$g(x)<0$，即$f'(x)<0$，$f(x)$在$[0,\gamma)$单调递减，$f(x)\leq f(0)=0$

这与$f(x)\geq 0$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$恒成立矛盾，不合题意 ....6 分

综上：$-\dfrac{2}{\pi}<a\leq 1$.

（2）令$h(x)=x-\sin x$，则$h'(x)=1-\cos x\geq 0$恒成立，所以$h(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增

又$h(0)=0$，所以当$x>0$时，$h(x)=x-\sin x>0$，即$\sin x<x$ ....7 分

所以$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{k(k+2)}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)<\frac{3}{4}$

即不等式右边恒成立 ....8 分

由（1）得：当$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，$\ln(1+x)<\sin x$成立..9 分

取$x=\dfrac{1}{k(k+2)}\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$

所以$\displaystyle\sin\frac{1}{k(k+2)}>\ln\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)=\ln\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}=\ln\frac{k+1}{k}-\ln\frac{k+2}{k+1}$ ....11 分

所以$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{k(k+2)}>\sin\frac{1}{3}+\sum_{k=2}^{n}\left(\ln\frac{k+1}{k}-\ln\frac{k+2}{k+1}\right)=\sin\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{2}-\ln\frac{n+2}{n+1}$

综上：$\displaystyle\sin\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{2}-\ln\frac{n+2}{n+1}<\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{k(k+2)}<\frac{3}{4}$得证. ....12 分