2024 届高三统一考试试题
数学参考答案

1. A 【解析】本题考查集合的交集,考查数学运算的核心素养.
因为 $2^x>0$,所以 $B=\{x|x\cdot 2^x>0\}=\{x|x>0\}$,所以 $A\cap B=(0,17]$.

2. C 【解析】本题考查三角函数的周期,考查数学运算的核心素养.
$y=\cos(1-2x)$,$y=\sin 2x$ 的最小正周期均为 π,但在$(0,1)$上不单调递减,$y=\tan(1-x)$的最小正周期为 π,且在$(0,1)$上单调递减,$y=-\sin\dfrac{x}{2}$的最小正周期为 4π.

3. A 【解析】本题考查排列组合的实际应用,考查应用意识与逻辑推理的核心素养.
因为第一站不去株洲,所以第一站可以从长沙、衡阳、郴州、益阳这 4 个城市中选择 1 个,共有 4 种选择,所以该旅游团四站的城市安排共有 $4A_4^3=96$ 种.

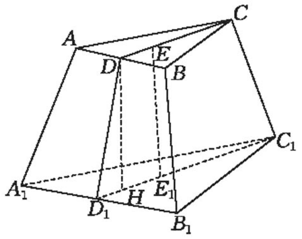
4. D 【解析】本题考查复数方程的求解与复数的模,考查数学运算的核心素养.
由 $z^3+z^2+z+1=0$,得 $z^2(z+1)+z+1=(z^2+1)(z+1)=0$. 因为 $i^2=-1$,所以 $z=\pm i$ 或 -1,所以 $|z_1-z_2|$ 的值为 $\sqrt{2}$ 或 2.

5. D 【解析】本题考查对数运算的实际应用,考查应用意识与逻辑推理的核心素养.
当 $m_2=3$,$m_1=0.5$ 时,$3-0.5=-2.5\lg\dfrac{E_2}{E_1}$,则$\dfrac{E_2}{E_1}=\dfrac{1}{10}$,则 $E_1=10E_2$,所以 0.5 等星的亮度是 3 等星亮度的 10 倍.

6. A 【解析】本题考查抛物线的定义的应用,考查直观想象与逻辑推理的核心素养.
因为 M 的准线方程为 $y=1$,所以 $|AF|=1-(-4)=5$,$d+1=|BF|$. 因为 $F(0,-1)$,所以 $|AF|+|BC|+d=5+|BC|+|BF|-1\geqslant 4+|CF|=4+\sqrt{(3-0)^2+(3+1)^2}=9$,当且仅当 B 在线段 CF 上时,等号成立,所以 $|AF|+|BC|+d$ 的最小值为 9.

7. B 【解析】本题考查导数的几何意义,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.
由 $f(x)=g(x)$,得 $x^3-x^2+2x+4=0$,设 $h(x)=x^3-x^2+2x+4$,则 $h'(x)=3x^2-2x+2>0(\Delta=4-24<0)$,所以 $h(x)$为增函数,因为 $h(-1)=0$,所以 $A(-1,3)$.
$f'(x)=3x^2$,则 $f'(-1)=3$,所以曲线 $y=f(x)$在点 A 处的切线方程为 $y-3=3(x+1)$,令 $x=0$,得 $y=6$,令 $y=0$,得 $x=-2$,则所求三角形的面积为$\dfrac{1}{2}\times 6\times 2=6$.

8. B 【解析】本题考查正棱台的体积与二面角,考查空间想象能力与运算求解能力.
如图,取 AB 的中点 D,取 A_1B_1 的中点 D_1,连接 DD_1,C_1D_1,CD,则 $DD_1\perp A_1B_1$,$C_1D_1\perp A_1B_1$,所以二面角 A-A_1B_1-C_1 的平面角为$\angle DD_1C_1$,则$\angle DD_1C_1=60^\circ$. 设上底面与下底面的中心分别为

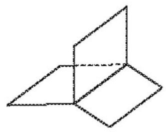


E,E_1，连接 EE_1，则 $DE=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$D_1E_1=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 过点 D 作 $DH\perp C_1D_1$，垂足为 H，则 $\angle DD_1H=60^\circ$，则 $\frac{DH}{D_1H}=\frac{DH}{\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{DH}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，则 $DH=1$，故该三棱台的体积为 $\frac{1}{3}\times1\times(\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\times2\times4)=\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

9. AC 【解析】本题考查直线与圆的位置关系，考查数学运算的核心素养.

依题意可设圆 C 的圆心坐标为 $(-4a,a)$，则 $\frac{|3\times(-4a)-a-3|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$，解得 $a=-1$ 或 $\frac{7}{13}$，所以圆 C 的圆心坐标为 $(4,-1)$ 或 $(-\frac{28}{13},\frac{7}{13})$.

10. ABC 【解析】本题考查立体几何初步中的点、线、面的位置关系，考查空间想象能力.

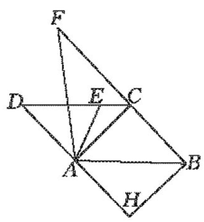


如图，交线 l_1,l_2,l_3 的位置关系可能是重合. 由三棱锥的三个侧棱相交于一点，可知交线 l_1,l_2,l_3 的位置关系可能是相交于一点. 由三棱柱的三个侧棱两两平行，可知交线 l_1,l_2,l_3 的位置关系可能是两两平行. 若有两条交线互相平行，则可证它们均与第三条直线平行，所以交线 l_1,l_2,l_3 的位置关系不可能是恰有两条交线平行.

11. ACD 【解析】本题考查平面向量的综合与基本不等式，考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

因为 $\cos\angle BAD=-\frac{3}{5}$，所以 $\sin\angle BAD=\frac{4}{5}$. 设 $|\overrightarrow{AB}|=a$，$|\overrightarrow{AD}|=b$，则 $ab\sin\angle BAD=\frac{4}{5}ab=4$，解得 $ab=5$，则 $\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{5}{|\overrightarrow{AD}|}=\frac{1}{a}+\frac{5}{b}\geqslant2\sqrt{\frac{5}{ab}}=2$，当且仅当 $b=5a=5$ 时，等号成立，A 正确.

因为 $\overrightarrow{DE}=3\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{BF}=-2\overrightarrow{FC}$，所以 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD})=\frac{3}{4}|\overrightarrow{AB}|^2+2|\overrightarrow{AD}|^2+\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}a^2+2b^2+\frac{5}{2}ab\times(-\frac{3}{5})\geqslant2\sqrt{\frac{3}{4}a^2\cdot2b^2}-\frac{15}{2}=\sqrt{6}ab-\frac{15}{2}=5\sqrt{6}-\frac{15}{2}$，当且仅当 $\frac{3}{4}a^2=2b^2$ 时，等号成立，所以 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{FA}$ 的最小值为 $5\sqrt{6}-\frac{15}{2}$，C 正确.



如图，过点 B 作 $BH\perp AD$，垂足为 H，则 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AD}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{AH}$，当 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AD}$ 上的投影向量为 $-\overrightarrow{AD}$ 时，$AD=AH=\frac{3}{5}AB$. 因为 $ab=5$，所以 $\frac{3}{5}a^2=5$，得 $a^2=\frac{25}{3}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=a^2-3=\frac{16}{3}$，$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{FA}=\frac{3}{4}a^2+2b^2-$

$\frac{15}{2}=\frac{3}{4}a^2+\frac{50}{a^2}-\frac{15}{2}=\frac{3}{4}\times\frac{25}{3}+\frac{50}{\frac{25}{3}}-\frac{15}{2}=\frac{19}{4}$,B 错误,D 正确.

12. ABD 【解析】本题考查函数的奇偶性与抽象函数,考查数学抽象与逻辑推理的核心素养.

由条件可知 $f(x^2-x)+f(x^2+x)=0$. 因为 $g(x)=f(x^2-\frac{1}{4})$,所以 $g(\frac{1}{2}-x)+g(\frac{1}{2}+x)=0$,且 $g(-x)=g(x)$,可得 $g(\frac{1}{2})=0$,$g(x+1)=-g(-x)=-g(x)$,所以 $g(\frac{3}{2})=-g(\frac{1}{2})=f(2)=0$,A,B,D 均正确.

取 $f(x)=\cos\sqrt{|x+\frac{1}{4}|\pi^2}$,则 $f(x^2+x)=\cos\sqrt{|x^2+x+\frac{1}{4}|\pi^2}=\cos\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2\pi^2}=\cos|\pi x+\frac{1}{2}\pi|=\cos(\pi x+\frac{1}{2}\pi)=-\sin\pi x$,此时 $f(x)$满足 $f(x^2+x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,$f(4)\neq0$,所以 C 未必成立.

13. $-\frac{5\pi}{18}$ 【解析】本题考查三角恒等变换,考查数学运算的核心素养.

因为 $\theta\in(-\frac{\pi}{3},0)$,所以 $3\theta\in(-\pi,0)$,依题意得 $\cos3\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $3\theta=-\frac{5\pi}{6}$,解得 $\theta=-\frac{5\pi}{18}$.

14. 211 【解析】本题考查椭圆的性质,考查应用意识与数学运算的核心素养.

因为 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $a=2b$. 因为长轴长为 82 cm,所以 $a=41$ cm,$b=20.5$ cm,故 $l=2\pi b+4(a-b)=41\pi+82=41\times3.14+82=210.74\approx211$ cm.

15. $[0.2,0.26]$ 【解析】本题考查全概率公式的实际应用,考查应用意识与数学运算的核心素养.

若从该中学三个年级的学生中随机选取 1 名学生,则这名学生阅读完《红楼梦》的概率为 $0.2\times\frac{4}{4+3+3}+0.25\times\frac{3}{4+3+3}+p\times\frac{3}{4+3+3}=0.155+0.3p\leqslant0.233$,解得 $p\leqslant0.26$. 因为该中学高三的学生阅读完《红楼梦》的概率不低于高一的学生阅读完《红楼梦》的概率,所以 $p\geqslant0.2$. 故 p 的取值范围是$[0.2,0.26]$.

16. 3841 【解析】本题考查数列与不等式的交汇,考查逻辑推理的核心素养与分类讨论的数学思想.

$A=\{n|n^2-2mn+4\leqslant0\}=\{n|(n-m)^2\leqslant m^2-4\}$.

当 $m=1$ 时,$A=\varnothing$,$b_1=0$;当 $m=2$ 时,$A=\{2\}$,$b_2=1$;

当 $m\geqslant3$ 时,$A=\{n|m-\sqrt{m^2-4}\leqslant n\leqslant m+\sqrt{m^2-4}\}$.

因为 $0<m-\sqrt{m^2-4}=\frac{4}{m+\sqrt{m^2-4}}\leqslant\frac{4}{3+\sqrt{3^2-4}}=3-\sqrt{5}<1$,

所以 $m+\sqrt{m^2-4}-(2m-1)=1-(m-\sqrt{m^2-4})>0$.

又 $m+\sqrt{m^2-4}<m+\sqrt{m^2}=2m$,所以 $b_m=2m-1$.

故数列$\{b_n\}$的前 62 项和为 $0+1+5+7+\cdots+123=1+\frac{(5+123)\times(62-2)}{2}=3841$.

17. 解：(1)依题意可得 $\mu=\frac{30\times1000}{120}=250$， ………………………………… 2 分

则 $P(X\geqslant250)=0.5$， ………………………………………………… 3 分

Z 的可能取值为 0，1，2，$P(Z=0)=(1-0.5)^2=0.25$，$P(Z=1)=2\times0.5\times(1-0.5)=0.5$，

$P(Z=2)=0.5^2=0.25$， ………………………………………………… 4 分

所以 Z 的分布列为

Z	0	1	2
P	0.25	0.5	0.25

………………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $P(X<249)=0.15$，所以 $P(249<X<251)=(0.5-0.15)\times2=0.7$. ……… 7 分

依题意可得 $Y\sim B(K,0.7)$， ………………………………………… 8 分

所以 $D(Y)=K\times0.7\times(1-0.7)=0.21K$. ……………………………… 9 分

因为 $D(Y)<42$，所以 $K<200$，又 K 为正整数，所以 K 的最大值为 199. …………… 10 分

18. (1)证明：在$\triangle ABC$中，$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$， ………………………… 1 分

在$\triangle ADC$中，$\frac{CD}{\sin\angle DAC}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$. ………………………………… 2 分

因为 AC 平分$\angle BAD$，所以$\angle BAC=\angle DAC$. …………………………… 3 分

又 $BC=CD$，所以 $\sin\angle ABC=\sin\angle ADC$， ……………………………… 4 分

所以$\angle ABC$与$\angle ADC$相等或互补. ………………………………………… 5 分

(2)解：因为 $AB\neq AD$，所以$\angle ABC$与$\angle ADC$互补. …………………………… 6 分

在$\triangle ABC$中，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=13-12\cos\angle ABC$， ……… 7 分

在$\triangle ADC$中，$AC^2=CD^2+DA^2-2CD\cdot DA\cdot\cos\angle ADC=5-4\cos\angle ADC$， ………… 8 分

所以 $13-12\cos\angle ABC=5-4\cos\angle ADC$.

又 $\cos\angle ABC=-\cos\angle ADC$，

所以 $\cos\angle ABC=\frac{1}{2}$， ………………………………………………… 9 分

则 $AC=\sqrt{13-12\cos\angle ABC}=\sqrt{7}$. ……………………………………… 10 分

所以$\triangle ABC$的面积 $S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC=\frac{3\sqrt{3}}{2}$， …………………………… 11 分

故$\triangle ABC$内切圆的半径 $r=\frac{2S}{AB+BC+AC}=\frac{3\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}$. ……………… 12 分

19. 证明：(1)因为 $2^{n+1}(a_{n+1}-a_n-1)=n-1$，所以 $a_{n+1}-a_n=\frac{n-1}{2^{n+1}}+1$，…………… 1 分

所以 $a_{n+1}+\frac{n+1}{2^{n+1}}-(a_n+\frac{n}{2^n})=a_{n+1}-a_n+\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{n-1}{2^{n+1}}+1+\frac{n+1-2n}{2^{n+1}}=1$，……… 3 分

所以 $\{a_n+\frac{n}{2^n}\}$ 是公差为 1 的等差数列. ………………………………………………………… 4 分

(2)因为 $a_1=\frac{1}{2}$，所以 $a_1+\frac{1}{2}=1$，由(1)知 $a_n+\frac{n}{2^n}=n$，则 $a_n=n-\frac{n}{2^n}$. ……………………… 5 分

设 $T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}$，

则 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}$，………………………………………………………………… 6 分

所以 $T_n-\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$，…… 9 分

则 $T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$. ………………………………………………………………………… 10 分

所以 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}-T_n=\frac{n(n+1)}{2}-(2-\frac{n+2}{2^n})$ ……………………………………………… 11 分

$=\frac{n^2+n-4}{2}+\frac{n+2}{2^n}>\frac{n^2+n-4}{2}$. ………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)以 A 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A_1(0,0,2)$，$E(2,1,0)$，$F(0,2,1)$，$B_1(2,0,2)$，$D(0,2,0)$，………………………………………………………………… 1 分

所以 $\overrightarrow{B_1D}=(-2,2,-2)$，$\overrightarrow{EF}=(-2,1,1)$，$\overrightarrow{A_1E}=(2,1,-2)$. ……………………………… 2 分

设 $\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{B_1D}=(-2\lambda,2\lambda,-2\lambda)$，则 $\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1P}=(2-2\lambda,2\lambda,-2\lambda)$. ………… 3 分

设平面 A_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

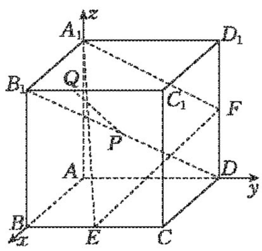
则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1E}=2x+y-2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=-2x+y+z=0,\end{cases}$ …………………………………………………………… 4 分

令 $x=3$，得 $\boldsymbol{n}=(3,2,4)$. …………………………………………………………………… 5 分

依题意可得 $\overrightarrow{A_1P}\cdot\boldsymbol{n}=6-6\lambda+4\lambda-8\lambda=0$，解得 $\lambda=\frac{3}{5}$. ……………………………… 6 分

所以 $B_1P=\frac{3}{5}B_1D=\frac{3}{5}\times2\sqrt{3}=\frac{6\sqrt{3}}{5}$. ………………………………………………………… 7 分

(2)因为 $\overrightarrow{B_1Q}=\frac{3}{10}\overrightarrow{B_1C_1}=(0,\frac{3}{5},0)$，……………………………… 8 分



所以 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{B_1Q}-\overrightarrow{B_1P}=(\frac{6}{5},-\frac{3}{5},\frac{6}{5})$. ………………………… 9 分

设直线 PQ 与平面 A_1EF 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PQ}\rangle|=\frac{3}{5}\times\frac{|2\times3-1\times2+2\times4|}{\sqrt{29}\times\frac{3}{5}\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=$

$\frac{4\sqrt{29}}{29}$,所以直线 PQ 与平面 A_1EF 所成角的正弦值为$\frac{4\sqrt{29}}{29}$. ………………………… 12 分

21. 解:(1)因为 $|DK_2|-|DK_1|=6<|K_1K_2|=8$, ………………………………………… 1 分

所以根据双曲线的定义可知点 D 的轨迹为以 K_1,K_2 为焦点,实轴长为 6 的双曲线的左支.
………………………………………………………………………………………… 2 分

由 $2a=6,c=4$,得 $a=3,b^2=c^2-a^2=7$, ………………………………………… 3 分

所以 C 的方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1(x<0)$. ………………………………………… 4 分

【注】C 的方程也可以写为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1(x\leqslant -3)$.

(2)由题意可设 l 的方程为 $x=my-4(m\neq 0)$,……………………………………… 5 分

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,

联立$\begin{cases}x=my-4,\\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1,\end{cases}$得 $(7m^2-9)y^2-56my+49=0$, ………………………… 6 分

则 $y_1+y_2=\frac{56m}{7m^2-9},y_1y_2=\frac{49}{7m^2-9}$. ………………………………………… 7 分

直线 $AM:y=\frac{y_1}{x_1+3}(x+3)$,直线 $BN:y=\frac{y_2}{x_2-3}(x-3)$,

联立 $y=\frac{y_1}{x_1+3}(x+3)$与 $y=\frac{y_2}{x_2-3}(x-3)$,

得$\frac{x+3}{x-3}=\frac{y_2(x_1+3)}{y_1(x_2-3)}=\frac{y_2(my_1-4+3)}{y_1(my_2-4-3)}=\frac{my_1y_2-y_2}{my_1y_2-7y_1}$ ………………………… 8 分

$=\frac{my_1y_2-(y_1+y_2)+y_1}{my_1y_2-7y_1}$ ………………………………………………………… 9 分

$=\frac{\frac{49m}{7m^2-9}-\frac{56m}{7m^2-9}+y_1}{\frac{49m}{7m^2-9}-7y_1}=\frac{-\frac{7m}{7m^2-9}+y_1}{-7(-\frac{7m}{7m^2-9}+y_1)}=-\frac{1}{7}$, ………………………… 10 分

解得 $x=-\frac{9}{4}$,故点 P 在定直线 $x=-\frac{9}{4}$上. ………………………………………… 11 分

因为圆$(x-4)^2+(y-5)^2=\frac{9}{16}$的圆心到直线 $x=-\frac{9}{4}$的距离为 $4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$,

所以$|PQ|$的最小值为$\frac{25}{4}-\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{11}{2}$. ………………………………………… 12 分

22. (1)证明:设函数 $g(x)=e^x-x(x\geqslant 0)$,则 $g'(x)=e^x-1$,当 $x\geqslant 0$ 时,$g'(x)\geqslant 0$,

所以 $g(x)$为增函数,所以 $g(x)\geqslant g(0)=1$. ………………………………………… 1 分

$f'(x)=e^x-x-\frac{a}{x+1}\geqslant 1-\frac{a}{x+1}=\frac{x+1-a}{x+1}$. ………………………………… 2 分

因为 $x\geqslant 0$,所以 $x+1\geqslant 1$,当 $a\leqslant 1$ 时,$x+1-a\geqslant 0$,……………………………… 3 分

所以 $f'(x)=\dfrac{x+1-a}{x+1}\geqslant 0$,所以 $f(x)$在$[0,+\infty)$上为增函数,

故 $f(x)\geqslant f(0)=1$,即当 $a\leqslant 1$ 时,$f(x)\geqslant 1$ 对 $x\in[0,+\infty)$恒成立. ………………… 4分

(2)解:$(x_1+1)(x_2+1)<e^{\frac{2a}{e}}$. ………………………………………………………… 5分

证明如下:

不妨设 $x_1<x_2$,由 $f(x_1)=f(x_2)$,得 $a=\dfrac{e^{x_2}-\frac{1}{2}x_2^2-e^{x_1}+\frac{1}{2}x_1^2}{\ln(x_2+1)-\ln(x_1+1)}$, ………………… 6分

所以要证明$(x_1+1)(x_2+1)<e^{\frac{2a}{e}}$,只需证 $\ln(x_1+1)+\ln(x_2+1)<\dfrac{2a}{e}$, ……………… 7分

即证$[\ln(x_2+1)]^2-[\ln(x_1+1)]^2<\dfrac{2}{e}(e^{x_2}-\dfrac{1}{2}x_2^2-e^{x_1}+\dfrac{1}{2}x_1^2)$,

即证$[\ln(x_2+1)]^2-\dfrac{2}{e}(e^{x_2}-\dfrac{1}{2}x_2^2)<[\ln(x_1+1)]^2-\dfrac{2}{e}(e^{x_1}-\dfrac{1}{2}x_1^2)$. ………………… 8分

设函数 $h(x)=[\ln(x+1)]^2-\dfrac{2}{e}(e^x-\dfrac{1}{2}x^2)$,则 $h'(x)=\dfrac{2\ln(x+1)}{x+1}-\dfrac{2}{e}(e^x-x)$.

(方法一)设函数 $\varphi(x)=\dfrac{2\ln(x+1)}{x+1}$,则 $\varphi'(x)=\dfrac{2[1-\ln(x+1)]}{(x+1)^2}$.

当$-1<x<e-1$ 时,$\varphi'(x)>0$;当 $x>e-1$ 时,$\varphi'(x)<0$. ………………………………… 9分

所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(e-1)=\dfrac{2}{e}$,所以 $\varphi(x)\leqslant\dfrac{2}{e}$. ………………………………………… 10分

易证$\dfrac{2}{e}(e^x-x)\geqslant\dfrac{2}{e}$,所以 $h'(x)\leqslant 0$,所以 $h(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递减, ………… 11分

又 $x_1<x_2$,所以 $h(x_2)<h(x_1)$,

则$[\ln(x_2+1)]^2-\dfrac{2}{e}(e^{x_2}-\dfrac{1}{2}x_2^2)<[\ln(x_1+1)]^2<\dfrac{2}{e}(e^{x_1}-\dfrac{1}{2}x_1^2)$,

从而$(x_1+1)(x_2+1)<e^{\frac{2a}{e}}$得证. ……………………………………………………… 12分

(方法二)设函数 $p(x)=e\ln(x+1)-x-1$,则 $p'(x)=\dfrac{e}{x+1}-1$,当$-1<x<e-1$ 时,$p'(x)>0$,当$x>e-1$ 时,$p'(x)<0$. ……………………………………………………… 9分

所以 $p(x)_{\max}=e\ln e-(e-1)-1=0$,所以 $e\ln(x+1)\leqslant x+1$.

所以$\dfrac{e\ln(x+1)}{x+1}\leqslant 1\leqslant e^x-x$,因为此连不等式的两个等号的取等条件不同,所以$\dfrac{e\ln(x+1)}{x+1}<e^x-x$, ……………………………………………………………………… 10分

从而$\dfrac{2\ln(x+1)}{x+1}<\dfrac{2}{e}(e^x-x)$,所以 $h'(x)<0$,所以 $h(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递减. ……… 11分

又 $x_1<x_2$,所以 $h(x_2)<h(x_1)$,

则$[\ln(x_2+1)]^2-\dfrac{2}{e}(e^{x_2}-\dfrac{1}{2}x_2^2)<[\ln(x_1+1)]^2-\dfrac{2}{e}(e^{x_1}-\dfrac{1}{2}x_1^2)$,

从而$(x_1+1)(x_2+1)<e^{\frac{2a}{e}}$得证. ……………………………………………………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线