

数 学

命题人：张志忠、赵攀峰、谭泽阳、叶勇胜

审题人：张志忠

得分：_____

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分，共 8 页。时量 120 分钟。满分 150 分。

第 I 卷

一、选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 若一条直线经过两点 $(1, 0)$ 和 $(2, \sqrt{3})$ ，则该直线的倾斜角为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

2. 已知向量 $\mathbf{a} = (m, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 0, 4)$ ，且 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ ，则实数 $m =$

- A. -2 B. -4 C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{4}$

3. 重阳节，农历九月初九，二九相重，谐音是“久”，有长久之意，是我国民间的传统节日。人们常在此日感恩敬老。某校在重阳节当日安排 6 位学生到两所敬老院开展志愿服务活动，要求每所敬老院至少安排 2 人，则不同的分配方案数是

- A. 35 B. 40 C. 50 D. 70

4. 曲线 $f(x) = x \ln x$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为

- A. $y = 2x + 2$ B. $y = 2x - 2$
C. $y = x - 1$ D. $y = x + 1$

5. 设 $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ ，随机变量 ξ 的分布列如表所示，则 $E(\xi)$

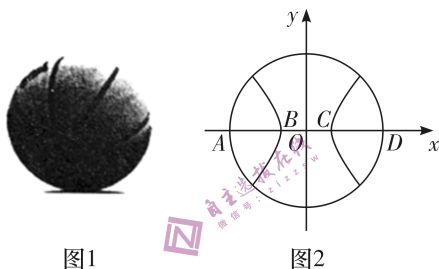
ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{2} \sin^2 \theta$	$\frac{1}{2}$	

- A. 有最大值 $\frac{5}{2}$ ，最小值 $\frac{3}{2}$ B. 有最大值 $\frac{9}{4}$ ，最小值 $\frac{7}{4}$
C. 有最大值 $\frac{9}{4}$ ，无最小值 D. 无最大值，有最小值 $\frac{7}{4}$

6. 南宋数学家杨辉在《详解九章算法》和《算法通变本末》中,提出了高阶等差数列的概念.如数列 1,3,6,10,后前两项之差得到新数列 2,3,4,新数列 2,3,4 为等差数列,这样的数列称为二阶等差数列.对这类高阶等差数列的研究,在杨辉之后一般称为“垛积术”.现有二阶等差数列,其前 7 项分别为 3,4,6,9,13,18,24,则该数列的第 19 项为

- A. 174 B. 184 C. 188 D. 190

7. 从某个角度观察篮球(如图 1)可以得到一个对称的平面图形(如图 2),篮球的外轮廓为圆 O ,将篮球的表面粘合线视为坐标轴和双曲线,若坐标轴和双曲线与圆 O 的交点将圆的周长八等分,且 $|AB| = |BC| = |CD|$,则该双曲线的离心率为



- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{16}{7}$ C. $\frac{4\sqrt{7}}{7}$ D. $\frac{9}{7}$

8. 已知函数 $f(x) = e^x(x^2 - 4x - 4) + \frac{1}{2}k(x^2 + 4x)$, $x = -2$ 是 $f(x)$ 的唯一极小值点,则实数 k 的取值范围为

- A. $[-e^2, +\infty)$ B. $[-e^3, +\infty)$
C. $[e^2, +\infty)$ D. $[e^3, +\infty)$

二、选择题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分,在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分)

9. $(x - \frac{1}{x})^6$ 的展开式中,下列结论正确的是

- A. 展开式共 6 项
B. 常数项为 -20
C. 所有项的二项式系数之和为 64
D. 所有项的系数之和为 0

10. 设公差小于 0 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,若 $S_{10} = S_{15}$,则

- A. $a_{15} = 0$ B. $|a_{10}| > |a_{15}|$
C. $S_{25} = 0$ D. 当且仅当 $n = 13$ 时, S_n 取最大值

11. 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+4$, 则
- A. $f(x)$ 有两个极值点
 - B. $f(x)$ 有三个零点
 - C. $f(x)$ 在 $[-1,4]$ 上的值域为 $[0,20]$
 - D. 点 $(1,2)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心
12. 已知 P 为双曲线 $C:\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 上的动点, 过点 P 作两渐近线的垂线, 垂足分别为 A,B , 记线段 PA,PB 的长分别为 m,n , 则
- A. 若 PA,PB 的斜率分别为 k_1,k_2 , 则 $k_1k_2=-3$
 - B. $mn>\frac{1}{2}$
 - C. $4m+n$ 的最小值为 $\sqrt{3}$
 - D. $|AB|$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$

选择题答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7
答案							
题号	8	9	10	11	12	得分	
答案							

第 II 卷

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$, 其前 n 项和为 S_n , 若 $S_7=127$, 则 $a_1=$ _____.
14. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x-\cos x$, 则 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=$ _____.
15. 已知 O 为坐标原点, 抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F,P 为 C 上一点, PF 与 x 轴垂直, Q 为 x 轴上一点, 且 $PQ\perp OP$, 若 $|FQ|=6$, 则 C 的准线方程为 _____.
16. 已知点 P 为直线 $l:x+y-2=0$ 上的动点, 过点 P 作圆 $C:x^2+2x+y^2=0$ 的切线 PA,PB , 切点为 A,B , 当 $|PC|\cdot|AB|$ 最小时, 直线 AB 的方程为 _____.

四、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17.(本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_{n+1}=3a_n-6$.

(1)记 $b_n=a_n-3$,证明: $\{b_n\}$ 是等比数列,并求 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18.(本小题满分 12 分)

已知线段 AB 的端点 B 的坐标是 $(6,5)$,端点 A 在圆 $C_1:(x-4)^2+(y-3)^2=4$ 上运动.

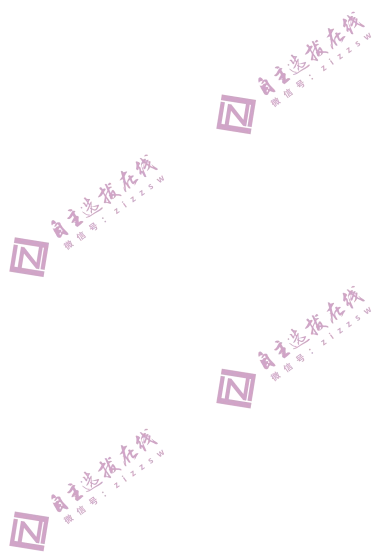
(1)求线段 AB 的中点 P 的轨迹 C_2 的方程;

(2)设圆 C_1 与轨迹 C_2 的交点为 M,N ,求线段 MN 的长.

19. (本小题满分 12 分)

某中学心理学社团在研究活动中,采用对比试验的方法评价不同心理暗示对人的影响,具体方法如下:将参加试验的志愿者随机分成两组,一组接受甲种心理暗示,另一组接受乙种心理暗示,通过对比这两组志愿者接受心理暗示后的结果来评价两种心理暗示的作用,现有 6 名男志愿者 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 和 4 名女志愿者 B_1, B_2, B_3, B_4 ,从中随机抽取 5 人接受甲种心理暗示,另 5 人接受乙种心理暗示.

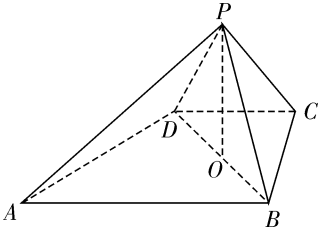
- (1)求接受甲种心理暗示的志愿者中包含 A_1 但不包含 B_1 的概率;
- (2)用 X 表示接受乙种心理暗示的女志愿者人数,求 X 的分布列与数学期望 $E(X)$.



20. (本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面四边形 $ABCD$ 为直角梯形, $AB \parallel CD$, $AB \perp BC$, $AB = 2CD$, O 为 BD 的中点, $BD = 4$, $PB = PC = PD = \sqrt{5}$.

- (1)证明: $OP \perp$ 平面 $ABCD$;
- (2)若 $BC = CD$,求平面 PAD 与平面 PBC 所成二面角的余弦值.



自主选拔在线
微信号: z122566

自主选拔在线
微信号: z122566

自主选拔在线
微信号: z122566

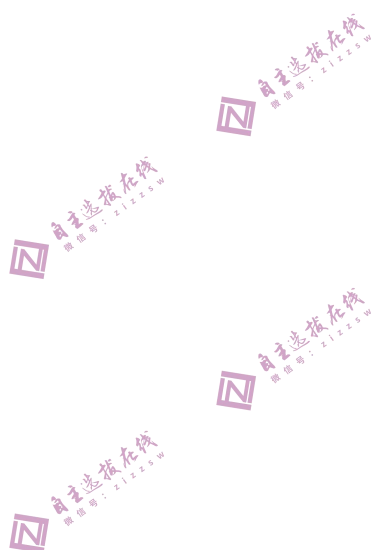
自主选拔在线
微信号: z122566

21. (本小题满分 12 分)

已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \log_a x - x$.

(1) 若 $a = e$ 且 $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$, 求函数 $f(x)$ 的最值;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点, 求实数 a 的取值范围.



22. (本小题满分 12 分)

已知中心在原点,长轴在 x 轴上的椭圆 C 的左右顶点分别为 $E(-3,0)$ 和 $D(3,0)$, P 为椭圆上的除左右顶点外的任一点,且 PD,PE 斜率之乘积为 $-\frac{1}{3}$.

- (1)求椭圆 C 的方程;
- (2)过 D 分别作两条直线与椭圆 C 交于点 A ,点 B . 线段 DA 的中点为 M ,线段 DB 的中点为 N ,若 $OM \perp ON$,求证:直线 AB 过定点.

