（六）

1. D　集合 $A=\{x|1\leqslant 2^x\leqslant 4\}=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|-x^2+3x\geqslant 0\}=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$，$\therefore(\complement_U A)\cap B=\{x|2<x\leqslant 3\}=(2,3]$，故选 D.

2. A　由题知，复数 $z=1+2i$，$\therefore \bar{z}=1-2i$，$\therefore \frac{\bar{z}}{1+i}=\frac{1-2i}{1+i}=\frac{(1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$，故选 A.

3. C　由题可得 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{9\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}^2-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{18+36-12\times 3\times\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}}=3\sqrt{2}$，故选 C.

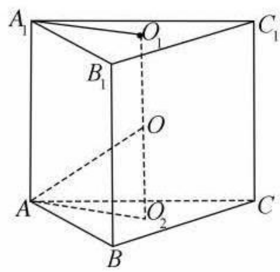
4. B　设等比数列的公比为 q，$\because a_5-a_3=12$，$a_6-a_4=q(a_5-a_3)=24$，$\therefore q=2$，$\therefore a_1q^4-a_1q^2=12$，$\therefore 12a_1=12$，$\therefore a_1=1$，$\therefore a_{2\,024}=2^{2\,023}$，故选 B.

5. C　$\because f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$，$\therefore \omega=\frac{2\pi}{T}=2$，$\therefore f(x)=2\sin(2x+\varphi)(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，$\because(\frac{\pi}{3},0)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心，$\therefore f(\frac{\pi}{3})=2\sin(\frac{2\pi}{3}+\varphi)=0(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，当 $x\in(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$，此时 $f(x)\in(-\sqrt{3},2]$，故选 C.

6. D　由题意，“这 3 人来自不同部门”的基本事件数为 $C_4^1C_4^1C_2^1=32$，“这 3 人中至少有 1 人来自宣传部”的基本事件数为 $C_4^1C_6^2+C_4^2C_6^1+C_4^3=100$，$\therefore P(A|B)=\frac{32}{100}=\frac{8}{25}$，故选 D.

7. B　$\because f(x)=2x^2-x+a\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore f'(x)=4x-1+\frac{a}{x}\geqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，即 $a\geqslant -4x^2+x$. 令 $g(x)=-4x^2+x=-4\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{16}(x\geqslant 1)$，$\therefore g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore g(x)_{\max}=g(1)=-3$，$\therefore a\geqslant -3$，即实数 a 的最小值为 -3，故选 B.

8. B　如图，设正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的上、下底面中心分别为 O_1、O_2，则 O_1O_2 的中点为正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的球心 O，设球 O 的半径为 R，则 $OA=R$，设 $AB=BC=AC=a$，$AA_1=h$，则 $OO_2=\frac{1}{2}h$，$O_2A=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，在 $\mathrm{Rt}\triangle OAO_2$ 中，$R^2=OA^2=OO_2^2+O_2A^2=\frac{1}{4}h^2+\frac{1}{3}a^2=\frac{2}{3}a^2$，$\therefore$ 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为 $4\pi\times R^2=12\pi$，$\therefore a^2=\frac{9}{2}$，$\therefore a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$h=\sqrt{6}$，$\therefore$ 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{1}{2}\times a^2\times\sin 60°\times h=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{6}=\frac{27\sqrt{2}}{8}$，故选 B.

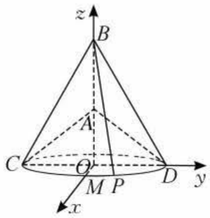


9. BCD　对于 A，当 $b=1$ 时，$(\frac{1}{3})^b>(\frac{1}{4})^b$，故 A 错误；对于 B，$\because a>b>0>c$，$\therefore \frac{b-c}{a-c}>\frac{b}{a}\Leftrightarrow\frac{a(b-c)-b(a-c)}{a(a-c)}>0\Leftrightarrow a(b-c)-b(a-c)>0\Leftrightarrow bc-ac>0\Leftrightarrow b-a<0\Leftrightarrow b<a$，恒成立，故 B 正确；对于 C，$\frac{a+2}{b^2}>\frac{b+2}{a^2}\Leftrightarrow\frac{a^2(a+2)-b^2(b+2)}{a^2b^2}>0\Leftrightarrow a^2(a+2)-b^2(b+2)>0$，易知函数 $f(x)=2x^2+x^3$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，由 $a>b>0$，得 $f(a)>f(b)$，$\therefore a^2(a+2)-b^2(b+2)>0$ 恒成立，故 C 正确；对于 D，$\because a>b>c>0$，$\therefore \frac{b}{a-b}>\frac{c}{a-c}\Leftrightarrow\frac{b(a-c)-c(a-b)}{(a-b)(a-c)}>0\Leftrightarrow b(a-c)-c(a-b)>0\Leftrightarrow ab-ac>0\Leftrightarrow b>c$ 恒成立，故 D 正确，故选 BCD.

10. CD　对于 A，当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(-x)=2^{-x}-2x$，又函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，即 $f(x)=-f(-x)$，$\therefore$ 当 $x<0$ 时，$f(x)=-2^{-x}+2x$，故 A 错误；$\therefore f(-2)=-2^2-4=-8$，故 B 错误；对于 C，$f(0)=0$，$\therefore f(x)=\begin{cases}2^x+2x,x>0,\\0,x=0,\\-2^{-x}+2x,x<0,\end{cases}$ $\therefore$ 函数 $f(x)$ 是增函数，故 C 正确；对于 D，令 $g(x)=f(x)-x=\begin{cases}2^x+x,x>0,\\-x,x=0,\\-2^{-x}+x,x<0,\end{cases}$ 令 $g(x)=0$，得 $x=0$，$\therefore$ 函数 $g(x)$ 有且只有一个零点，即曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=x$ 有且

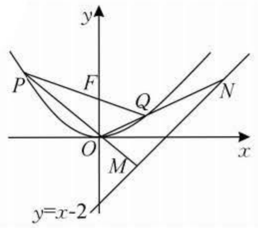
只有一个交点,故 D 正确,故选 CD.

11. AC　如图,延长 BA 交圆锥底面圆于点 O,则 O 为底面圆的圆心,且 $AB\perp$底面圆 O,$\because AB=AC=2,BC=BD=2\sqrt{3}$,$\therefore\cos\angle ABC=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore\angle ABC=30^\circ$,$\therefore$直线 AB 与直线 BC 所成角为 30°,$\therefore$直线 AB 与直线 PB 所成角为 30°,故 A 正确;易知 $AB\perp CD$,$\therefore OD=OC=\frac{1}{2}BC=\sqrt{3}$,设点 M 是$\overset{\frown}{CD}$的中点,则 $OM\perp CD$,如图,以 O 为坐标原点,分别以 OM,OD,OB 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴,则 $O(0,0,0)$,$M(\sqrt{3},0,0)$,$B(0,0,3)$,$A(0,0,1)$,$C(0,-\sqrt{3},0)$,设 $P(\sqrt{3}\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta,0)$,$\theta\in[-90^\circ,90^\circ]$,



则$\overrightarrow{AC}=(0,-\sqrt{3},-1)$,$\overrightarrow{BP}=(\sqrt{3}\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta,-3)$,$\therefore\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BP}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BP}|}=\frac{3-3\sin\theta}{2\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\sin\theta}{4}\in[0,\frac{\sqrt{3}}{2}]$,$\therefore$直线 AC 与直线 PB 所成角的取值范围为$[30^\circ,90^\circ]$,故 B 错误;若$\overset{\frown}{CP}=2\overset{\frown}{PD}$,则 $P(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$,$\therefore\overrightarrow{BP}=(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-3)$,$\therefore\overrightarrow{CB}=(0,\sqrt{3},3)$,设平面 BCP 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-3z=0,\\\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}y+3z=0,\end{cases}$令 $y=\sqrt{3}$,得 $\boldsymbol{n}=(-3,\sqrt{3},-1)$,易知平面 BCD 的一个法向量为$\overrightarrow{OM}=(\sqrt{3},0,0)$,$\therefore\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{OM}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OM}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{OM}|}=\frac{-3\sqrt{3}}{\sqrt{13}\times\sqrt{3}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13}$,$\therefore$二面角 $P-BC-D$ 的正弦值为 $\sqrt{1-(-\frac{3\sqrt{13}}{13})^2}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$,故 C 正确;旋转形成的几何体的表面积为 $\pi\times\sqrt{3}\times2\sqrt{3}+\pi\times\sqrt{3}\times2=(6+2\sqrt{3})\pi$,故 D 错误. 故选 AC.

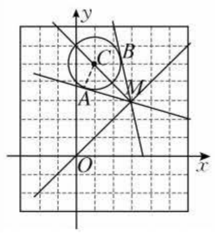
12. BCD　抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$的焦点为 $F(0,\frac{p}{2})$,准线方程为 $y=-\frac{p}{2}$,$\therefore|AF|=\frac{p}{2}+2=3$,解得 $p=2$,故 A 错误;联立$\begin{cases}y=x-1,\\x^2=4y,\end{cases}$整理得 $x^2-4x+4=0$,$\therefore\Delta=0$,$\therefore$直线 $y=x-1$ 与 C 相切,故 B 正确;设 $P(p,\frac{p^2}{4})$,$Q(q,\frac{q^2}{4})$,$\because PQ$中点的纵坐标为 2,$\therefore\frac{1}{2}(\frac{p^2}{4}+\frac{q^2}{4})=2$,整理得 $p^2+q^2=16$,$\therefore|PQ|^2=(p-q)^2+(\frac{p^2}{4}-\frac{q^2}{4})^2=(p-q)^2[1+\frac{1}{16}(p+q)^2]=(p^2+q^2-2pq)[1+\frac{1}{16}(p^2+q^2+2pq)]=(16-2pq)(2+\frac{1}{8}pq)=\frac{1}{4}(8-pq)(16+pq)=\frac{1}{4}[144-(pq+4)^2]$,$pq=-4$ 时,$|PQ|^2$取得最大值$\frac{1}{4}\times144=36$,$\therefore|PQ|$的最大值为 6,故 C 正确;$k_{OP}=\frac{p}{4}$,$k_{OQ}=\frac{q}{4}$,$\therefore$直线 OP 的方程为 $y=\frac{p}{4}x$,与直线 $y=x-2$ 联立,得点 $M(\frac{8}{4-p},\frac{2p}{4-p})$,同理可得点 $N(\frac{8}{4-q},\frac{2q}{4-q})$,$\therefore|MN|=\sqrt{(\frac{8}{4-p}-\frac{8}{4-q})^2+(\frac{2p}{4-p}-\frac{2q}{4-q})^2}=\sqrt{\frac{128[(p+q)^2-4pq]}{[16-4(p+q)+pq]^2}}$,设直线 l 的方程为 $y=kx+1$,联立$\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y,\end{cases}$整理得 $x^2-4kx-4=0$,$\therefore p+q=4k$,$pq=-4$,$\therefore|MN|=\sqrt{\frac{128[(p+q)^2-4pq]}{[16-4(p+q)+pq]^2}}=\sqrt{\frac{128(16k^2+16)}{[16-16k-4]^2}}=\frac{16}{7}$,整理得 $17k^2+48k+31=0$,解得 $k=-1$ 或 $k=-\frac{31}{17}$,$\therefore$直线 l 的方程为 $x+y-1=0$ 或 $31x+17y-17=0$,故 D 正确. 故选 BCD.



13. 108　$(x+2)(2x-1)^6$的展开式中 x^2的系数是 $C_6^5\times2\times(-1)^5\times1+C_6^4\times2^2\times(-1)^4\times2=108$.

14. $-\frac{4}{15}$　由题知,$\tan\theta=-\frac{1}{3}$,$\therefore\cos2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{4}{5}$,$\therefore\tan\theta\cdot\cos2\theta=-\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=-\frac{4}{15}$.

15. $\sqrt{6}$　由题知,直线 OM 为直线 $y=x$,曲线 $C:x^2+y^2-2x-10y+24=0$ 即圆 $C:(x-1)^2+(y-5)^2=2$,显然



圆心(1,5)不在直线 OM 上. 由对称性可知,点 M 是直线 $y=x$ 上的特殊点,CM 垂直于直线 $y=x$ 时,从点 M 作图的两条切线才能关于直线 $y=x$ 对称,∴直线 CM 的方程为 $y-5=-(x-1)$,即 $y=6-x$,与 $y=x$ 联立可求出点 $M(3,3)$,∴$|CM|=2\sqrt{2}$. 在 Rt$\triangle ACM$ 中,$\angle CAM=90°$, $\sin\angle AMC=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$, ∴$\angle AMC=30°$, ∴$|AM|=\sqrt{6}$,$\angle AMB=2\angle AMC=60°$,又 $|AM|=|BM|$,∴$\triangle ABM$ 是等边三角形,∴$|AB|=|AM|=\sqrt{6}$.

16. 5　由题知,$F(-1,0)$,直线 $l_1:x=my-1(m\neq0)$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$D(x_0,y_0)$,联立$\begin{cases}x=my-1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$整理得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$,$\Delta=36m^2+36(3m^2+4)>0$,所以 $y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$, $y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$. 由 $\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|AD|}{|BD|}$,可设$\begin{cases}\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB},\\ \overrightarrow{DA}=\lambda\overrightarrow{DB},\\ \lambda>0,\end{cases}$即$\begin{cases}(-1-x_1,-y_1)=\lambda(x_2+1,y_2),\\ (x_1-x_0,y_1-y_0)=\lambda(x_2-x_0,y_2-y_0),\end{cases}$ 则 $-y_1=\lambda y_2$, $y_1-y_0=\lambda(y_2-y_0)$,所以 $\lambda=-\frac{y_1}{y_2}=\frac{y_1-y_0}{y_2-y_0}$,解得 $y_0=\frac{2y_1y_2}{y_1+y_2}=-\frac{3}{m}$,则 $x_0=-4$,即 $D(-4,-\frac{3}{m})$,直线 $l_2:x=-\frac{1}{m}y-1$,与 $x=1$ 联立,得 $C(1,-2m)$,∴$|CD|=\sqrt{5^2+(-\frac{3}{m}+2m)^2}=\sqrt{4m^2+\frac{9}{m^2}+13}\geqslant5$,当且仅当 $m=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$时取等号,∴$|CD|$的最小值为 5.

17. 解:(1)在$\triangle ABC$ 中,$b=2$,$c=4$,$C=\frac{\pi}{3}$,

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,即 $16=a^2+4-2a$,

整理得 $a^2-2a-12=0$,……………………………………………………………… 2分

解得 $a=1+\sqrt{13}$或 $a=1-\sqrt{13}$(舍去);

∴$a=1+\sqrt{13}$,……………………………………………………………… 4分

∴$\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times(1+\sqrt{13})\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{39}}{2}$. ……………………… 6分

(2)在$\triangle ABC$ 中,由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4+16-1-13-2\sqrt{13}}{2\times2\times4}=\frac{3-\sqrt{13}}{8}<0$, ………… 8分

又 $A\in(0,\pi)$,∴A 是钝角. ……………………………………………………… 9分

∴$\triangle ABC$ 是钝角三角形. ……………………………………………………… 10分

18. 解:(1)[4. 5,8. 5)的频率为 0. 75,故 80%分位数位于[8. 5,9. 5),设为 x,则 $0.75+(x-8.5)\times0.15=0.8$,

解得 $x\approx8.83$. 即所求 80%分位数约为 8. 83. ………………………………… 3分

(2)这 200 名学生最近 15 日内的平均学习时间的样本平均数为

$\overline{x}=5\times0.1+6\times0.15+7\times0.2+8\times0.3+9\times0.15+10\times0.1=7.55$, ………………… 5分

方差为 $s^2=0.1\times(-2.55)^2+0.15\times(-1.55)^2+0.2\times(-0.55)^2+0.3\times0.45^2+0.15\times1.45^2+0.1\times2.45^2\approx2.05$. ……………………………………………………………… 7分

∴本校学生最近 15 日内的平均学习时间 X 近似服从正态分布 $N(7.55,2.05)$. ……………… 8分

∵$7.55+\sqrt{2.05}\approx8.98$,

∴$P(X>8.98)=0.5-\frac{P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)}{2}\approx0.5-0.341\ 35=0.158\ 65$. ……………… 10分

∵$2\ 000\times0.158\ 65\approx317$, ……………………………………………………… 11分

∴估计全校学生最近 15 日内的平均学习时间超过 8. 98 小时的人数为 317. ………………… 12分

19. 解:(1)∵$S_n=\frac{1}{2}(n+\frac{3}{2})^2+m$,$m\in\mathbf{R}$,

∴当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\left[\frac{1}{2}(n+\frac{3}{2})^2+m\right]-\left[\frac{1}{2}(n-1+\frac{3}{2})^2+m\right]=n+1$. ………………… 2分

∵$a_1=2$ 满足 $a_n=n+1$,

∴$a_n=n+1$,$n\in\mathbf{N}^*$, ……………………………………………………… 4分

又 $a_1=S_1=\frac{25}{8}+m=2$, ……………………………………………………… 5分

∴$m=-\frac{9}{8}$. ……………………………………………………………… 6分

(2)由(1)知,$b_n=(n+1)\cdot 3^n$, …………………………………………………… 7分

∴数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=2\times 3^1+3\times 3^2+4\times 3^3+5\times 3^4+\cdots+(n+1)\cdot 3^n$, …………………… 9分

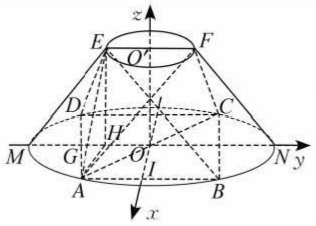
∴$3T_n=2\times 3^2+3\times 3^3+4\times 3^4+5\times 3^5+\cdots+n\cdot 3^n+(n+1)\cdot 3^{n+1}$, …………………… 10分

∴$-2T_n=2\times 3^1+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^n-(n+1)\cdot 3^{n+1}=\dfrac{3\times(1-3^n)}{1-3}-(n+1)\cdot 3^{n+1}+3$

$=-(n+\dfrac{1}{2})\cdot 3^{n+1}+\dfrac{3}{2}$, …………………………………………………… 11分

∴$T_n=\dfrac{2n+1}{4}\cdot 3^{n+1}-\dfrac{3}{4}$. …………………………………………………… 12分

20. 解:(1)如图,设圆台的上、下底面圆的圆心分别为O',O,过点O作$MN\,/\!/\,EF$,与AD交于点G,过点E作$EH\perp MN$于点H,连接$O'O$,AH,则$O'O$是圆台的高,且$O'O\,/\!/\,EH$,



由题知,$O'E=O'F=OH=1$,$AB=AD=BC=CD=4$,

∴$AG=DG=2$,$GH=1$.

又$AD\perp MN$,∴$AH=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

又$EH\perp$底面$ABCD$,∴$EH\perp AH$.

又$AE=\sqrt{14}$,∴$EH=\sqrt{14-5}=3$,∴$O'O=EH=3$. ……………… 2分

如图,取AB的中点I,以O为坐标原点,分别以OI,ON,OO'为x轴,y轴,z轴建立空间直角坐标系, …………………………………… 3分

则$O(0,0,0)$,$A(2,-2,0)$,$B(2,2,0)$,$C(-2,2,0)$,$E(0,-1,3)$,$F(0,1,3)$,

∴$\overrightarrow{BE}=(-2,-3,3)$,$\overrightarrow{CF}=(2,-1,3)$,$\overrightarrow{EF}=(0,2,0)$,

设平面$CDEF$的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{CF}\cdot\boldsymbol{n}=2x-y+3z=0,\\ \overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}=2y=0,\end{cases}$

令$x=3$,则$\boldsymbol{n}=(3,0,-2)$, …………………………………………………… 5分

∴点B到平面$CDEF$的一个距离为$\dfrac{|\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-6+0-6|}{\sqrt{9+0+4}}=\dfrac{12}{\sqrt{13}}=\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$. …………………… 7分

(2)由(1)知,$\overrightarrow{AC}=(-4,4,0)$,$\overrightarrow{CF}=(2,-1,3)$,$\overrightarrow{BE}=(-2,-3,3)$,

设平面ACF的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(a,b,c)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{m}=-4a+4b=0,\\ \overrightarrow{CF}\cdot\boldsymbol{m}=2a-b+3c=0,\end{cases}$

令$a=1$,得$\boldsymbol{m}=(1,1,-\dfrac{1}{3})$, …………………………………………………… 9分

设直线BE与平面ACF所成角为θ,

则直线BE与平面ACF所成角的正弦值为$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BE},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\dfrac{\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{BE}|\cdot|\boldsymbol{m}|}\right|=$

$\dfrac{|-2-3-1|}{\sqrt{4+9+9}\times\sqrt{1+1+\frac{1}{9}}}=\dfrac{9\sqrt{418}}{209}$. …………………………………………………… 12分

21. 解:(1)双曲线Γ:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$,

∵其中一条渐近线与斜率为$-\sqrt{5}$的直线垂直,

∴$\dfrac{b}{a}\cdot(-\sqrt{5})=-1$, …………………………………………………… 1分

即$a=\sqrt{5}b$,

∴$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6}b$, …………………………………………………… 2分

又$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{6}$, …………………………………………………… 3分

∴$c=\sqrt{6}$,$b=1$,$a=\sqrt{5}$, …………………………………………………… 4分

∴双曲线Γ的标准方程为$\dfrac{x^2}{5}-y^2=1$. …………………………………………… 5分

(2)假设存在点P,由题知,直线l的方程为$y=x-\sqrt{6}$, …………………………………… 6分

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{5}-y^2=1,\\ y=x-\sqrt{6},\end{cases}$

消去 y 并整理得 $4x^2-10\sqrt{6}x+35=0$， …………………………………………………… 7分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{5\sqrt{6}}{2}$，$x_1x_2=\frac{35}{4}$. …………………………………………………… 8分

设 $\overrightarrow{OP}=(x_3,y_3)$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$，

则 $\begin{cases}x_3=\lambda x_1+x_2,\\ y_3=\lambda y_1+y_2,\end{cases}$

又 P 为双曲线上一点，即 $x_3^2-5y_3^2=5$，

$\therefore(\lambda x_1+x_2)^2-5(\lambda y_1+y_2)^2=5$，

整理得 $\lambda^2(x_1^2-5y_1^2)+(x_2^2-5y_2^2)+2\lambda(x_1x_2-5y_1y_2)=5$，…………………… 9分

又 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 在双曲线 Γ 上，

$\therefore x_1^2-5y_1^2=5$，$x_2^2-5y_2^2=5$，

又 $x_1x_2-5y_1y_2=x_1x_2-5(x_1-\sqrt{6})(x_2-\sqrt{6})=-4x_1x_2+5\sqrt{6}(x_1+x_2)-30=-4\times\frac{35}{4}+5\sqrt{6}\times\frac{5\sqrt{6}}{2}-30$

$=10$，…………………………………………………………………………… 10分

$\therefore\lambda^2+4\lambda=0$，解得 $\lambda=-4$ 或 $\lambda=0$（舍去），…………………………………… 11分

$\therefore$ 在 Γ 上存在异于 M、N 两点的点 P，使得 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$，且 $\lambda=-4$. ……………………… 12分

22.(1)解：函数 $f(x)=x^{-2}\ln x+1=\frac{\ln x}{x^2}+1$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

且 $f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$，…………………………………………………………………… 1分

令 $f'(x)>0$，得 $x\in(0,\sqrt{e})$；令 $f'(x)<0$，得 $x\in(\sqrt{e},+\infty)$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\sqrt{e})$，单调递减区间为 $(\sqrt{e},+\infty)$，……………………… 2分

又 $f(\frac{1}{e})=-e^2+1<0$，$f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}+1>0$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\sqrt{e})$ 内有一个零点，………………………………………………… 3分

$\because x\to+\infty$，$f(x)\to1^+$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上没有零点，…………………………………………………… 4分

综上，函数 $f(x)$ 的零点个数为1. …………………………………………………………… 5分

(2)证明：函数 $g(x)=e^x-a\ln(x-1)$，

则 $g'(x)=e^x-\frac{a}{x-1}=\frac{(x-1)e^x-a}{x-1}(x>1,a>0)$，…………………………………………… 6分

令 $m(x)=(x-1)e^x-a(x>1,a>0)$，则 $m'(x)=xe^x>0$，

$\therefore m(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g'(x)$ 在区间 $(1,1+e^{-a})$ 上有且只有一个零点，且 $m(1)<0$，

$\therefore m(1+e^{-a})=e^{1+e^{-a}}\cdot e^{-a}-a=e^{1+e^{-a}-a}-a>0$，…………………………………… 7分

$\therefore e^{1+e^{-a}-a}>a$，

即 $1+e^{-a}-a>\ln a$，$\therefore 1+e^{-a}-\ln a>a$，………………………………………………… 8分

要证明 $\frac{a(a+1)}{2a+1}<\frac{1}{a}$，即证明 $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}>a$， …………………………………………… 9分

先证明：$e^x>x+1(x>0)$，

令 $n(x)=e^x-x-1$，则 $n'(x)=e^x-1>0$，

$\therefore n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore n(x)>n(0)=0$，

$\therefore e^x>x+1(x>0)$. ①

在①中，令 $x=a$，得 $e^a>a+1$，$\therefore e^{-a}<\frac{1}{a+1}$， ………………………………………… 10分

在①中，令 $x=\ln\frac{1}{a}$，则 $\frac{1}{a}>1-\ln a$，

$\therefore\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}>1+e^{-a}-\ln a>a$，………………………………………………………… 11分

$\therefore\frac{a(a+1)}{2a+1}<\frac{1}{a}$. …………………………………………………………………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。