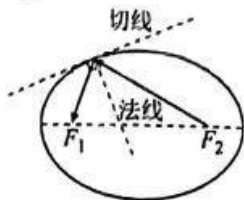




8. 椭圆具有光学性质:从椭圆的一个焦点射出的光线,经过椭圆反射后,反射光线过椭圆的另一个焦点,如图所示.已知椭圆  $E: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{2} = 1$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ,  $M$  为  $E$  上一点,过点  $M$  作  $E$  的切线  $l$ ,点  $P$  与点  $F_2$  关于  $l$  对称,记原点  $O$  到  $l$  的距离为  $d$ ,若  $\angle F_1MF_2 = 120^\circ$ ,则  $|PF_1| + d =$



- A. 5                      B. 8                      C. 10                      D. 12

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 为庆祝杭州第 19 届亚运会的顺利举办,杭州某中学举办了一场“亚运知识知多少”的体育知识竞赛,满分 100 分.该校高三年级代表队 6 名参赛学生的成绩(单位:分)分别为 92,100,96,98,96,97,则关于这 6 名学生的成绩,下列说法正确的是

- A. 中位数为 97  
B. 众数为 96  
C. 平均成绩不超过 96 分  
D. 第 50 百分位数为 98

10. 氡,亦称超铀元素,是氡的同位素之一,它的原子核由一个质子和两个中子组成,并带有放射性,会发生  $\beta$  衰变,其半衰期是 12.43 年,样本中氡的质量  $N$  随时间  $t$ (单位:年)的衰变规律满足  $N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{12.43}}$ ,其中  $N_0$  表示氡原有的质量,则(参考数据:  $\lg 2 \approx 0.301$ )

- A.  $t = 12.43 \log_2 \frac{N}{N_0}$   
B. 经过 24.86 年后,样本中的氡元素会全部消失  
C. 经过 62.15 年后,样本中的氡元素变为原来的  $\frac{1}{32}$   
D. 若  $x$  年后,样本中氡元素的含量为  $0.4N_0$ ,则  $x > 16$

11. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x)$  是  $f(x)$  的导函数,  $2f(x) + xf'(x) = \frac{e^{3x}}{x^2}$ ,且  $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{9e^2}{8}$ ,  $g(x) = x^2 f(x) - e^6 \ln x$ ,则

- A.  $f(2023) > f(2024)$   
B.  $f(x)$  在区间  $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$  上的最小值为  $\frac{9e^2}{8}$   
C.  $g(x)$  的单调递减区间为  $(0, 2)$   
D.  $g(x)$  存在极大值

12. 为了使学生熟练掌握一定的劳动技能,理解劳动创造价值,某中学组织学生到工厂进行实践活动.在活动中,要求学生将半径为 6 cm 的球型工件切割成不同形状的几何体工件,则能成功切割出的工件形状可以为

- A. 棱长为 6.5 cm 的正方体  
B. 底面直径为 10 cm,高为 7 cm 的圆柱体  
C. 底面直径为 8 cm,高为 10 cm 的圆锥  
D. 底面棱长为 4 cm,高为 8 cm 的正三棱锥

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. “~~秦皇~~五岳”是我国八座旅游名山,其中“三山”指黄山、庐山、雁荡山;“五岳”指泰山、华山、衡山、嵩山、恒山.某外国友人准备从这八座名山中选择两座或三座前去旅游,若要求选中的名山中至少有一座来自“三山”,则不同的选择方案有 \_\_\_\_\_ 种.(用数字作答)
14. 已知某圆台上、下底面的半径分别为 2,3,圆台的体积为  $19\pi$ ,则其母线长为 \_\_\_\_\_.
15. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的中心为  $O$ ,左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ,  $C$  的右支上的点  $M$  满足  $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0$ ,直线  $MF_1$  与  $y$  轴交于点  $A$ ,若  $|AF_1| = \sqrt{10}|OA|$ ,则  $C$  的离心率为 \_\_\_\_\_.
16. 已知函数  $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1, g(x) = f^2(x) + (1-m)f(x) + m - 2$ ,若  $g(x)$  在区间  $\left[0, \frac{11\pi}{12}\right]$  上有 4 个零点,则  $m$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

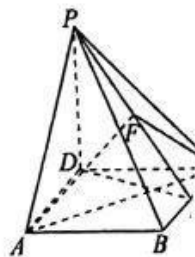
记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,已知  $c \sin A = \frac{4b \sin B}{1 + \cos B}$ .

- (1) 证明:  $a + c = 3b$ ;  
(2) 求  $\sin B$  的最大值.

18. (本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PD \perp$  平面  $ABCD$ ,底面四边形  $ABCD$  是矩形.  $AD = \sqrt{2}, AB = PD = 1, E$  为  $BC$  的中点.

- (1) 求证:  $AC \perp$  平面  $PDE$ ;  
(2) 当  $F$  为  $PE$  的中点时,求  $AP$  与平面  $ACF$  所成角的正弦值.



19. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = 2 \ln x - \frac{m}{x} - 1 (m \neq 0)$ .

- (1) 讨论  $f(x)$  的极值情况;  
(2) 当  $m < -1$  时,证明:  $f(x) > \frac{2m+2}{m-1}$ .

20. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{1}{5}, a_{n+1} = \frac{a_n}{3-4a_n}$ .

(1) 求证: 数列  $\left\{\frac{1}{a_n} - 2\right\}$  是等比数列;

(2) 记  $b_n = \frac{n^2 a_n}{1-2a_n}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

21. (本小题满分 12 分)

榴莲是一种广泛种植于东南亚的热带水果, 富含多种营养成分. 榴莲因其独特的香味和口感在世界范围内广受欢迎, 被誉为“水果之王”. 近年来, 我国农业专家攻克了榴莲种植难题, 在广东、海南等地开始推广种植榴莲, 拓宽了农民的致富之路. 海南省三亚市幸福村是榴莲种植村, 为提高村民的收入, 该村开展了“游果园、吃榴莲”的乡村休闲旅游活动, 吸引了大量游客前往.

(1) 某周日该村的村民采摘了 11 个榴莲供游客免费品尝, 其中 6 个一级榴莲, 5 个二级榴莲 (二级榴莲的品质胜过一级榴莲).

(i) 若将这 11 个榴莲分别装在甲、乙两个箱子中, 其中甲箱装有 4 个一级榴莲, 2 个二级榴莲, 乙箱装有 2 个一级榴莲, 3 个二级榴莲, 先从甲箱中任取 1 个榴莲放入乙箱, 再从乙箱中任取 1 个榴莲, 求从乙箱中取出的恰好是一级榴莲的概率;

(ii) 现从这 11 个榴莲中随机选出 2 个榴莲供上午 10 时前到达的游客品尝, 记其中一级榴莲的个数为  $X$ , 求  $X$  的期望;

(2) 幸福村决定将优质榴莲拿出来进行趣味叫卖, 在吸引游客的同时获取更高的利润. 叫卖方式如下: 以 40 元/斤为初始单价, 通过电脑出现随机数确定新单价, 电脑会随机出现 0, 1, 2, ..., 9 这 10 个数字中的一个. 若出现的数字不超过 6, 则在原单价基础上增加 10 元作为新单价; 若出现的数字超过 6, 则在原单价基础上增加 20 元作为新单价, 重复上述过程. 若出现 150 元的叫价, 则停止叫价, 游客以 150 元/斤的单价购买此优质榴莲; 若未出现叫价为 150 元的情况, 则游客失去购买资格, 并停止叫价. 现有一游客参加了本次趣味叫卖, 试估计该游客成功买到优质榴莲的概率. (精确到 0.01)

22. (本小题满分 12 分)

已知  $M$  是平面直角坐标系  $xOy$  内的动点, 直线  $l_1: x = -1$  与  $x$  轴交于点  $G$ , 点  $F$  与点  $G$  关于原点对称, 过点  $M$  作  $MH \perp l_1$  于点  $H$ , 且  $FH$  平分  $\angle MFO$ .

(1) 求动点  $M$  的轨迹曲线  $C$  的方程;

(2) 点  $A, B$  在  $C$  上, 且  $A, B, F$  三点共线, 直线  $l_2: x = \frac{1}{2}y + n$  与直线  $GA, GB, AE$  分别交于点  $D, E, P, Q$ , 且  $|PQ|^2 = |DQ| \cdot |EQ|$ , 求  $n$  的取值范围

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线