2024 届新高考基地学校第三次大联考

数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上指定位置上，在其他位置作答一律无效.

3．本卷满分为 150 分，考试时间为 120 分钟.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $M=\{-3,-2,0,2,3\}$，$N=\left\{x\left|\frac{x-2}{x+2}\geq 0\right.\right\}$，则 $M\cap N=$

A．$\{-3,-2,2,3\}$　　B．$\{-3,2,3\}$　　C．$\{-3,0,2,3\}$　　D．$\{-3,3\}$

【答案】B

【解析】$N=\{x\,|\,x\geq 2或x<-2\}$，$M\cap N=\{-3,2,3\}$，选 B.

2．已知 $(1+\mathrm{i})z=-1+5\mathrm{i}$，则 $\bar{z}=$

A．$2-3\mathrm{i}$　　B．$2+3\mathrm{i}$　　C．$3-2\mathrm{i}$　　D．$3+2\mathrm{i}$

【答案】A

【解析】$(1+\mathrm{i})z=-1+5\mathrm{i}$，$\therefore z=\frac{-1+5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(-1+5\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=2+3\mathrm{i}$，$\bar{z}=2-3\mathrm{i}$，选 A.

3．已知 $\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则 $\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=$

A．$\frac{5}{6}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{6}$　　D．$-\frac{1}{6}$

【答案】A

【解析】$\cos\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)-\sin\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\cos\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$，$\cos\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{5}{6}$，选A.

4．若直线$y=ax-3$与曲线$y=\ln x$相切，则实数a的值为

A．$\dfrac{1}{e}$　　B．$\dfrac{1}{e^2}$　　C．e　　D．e^2

【答案】D

【解析】设切点$(x_0,\ln x_0)$，$y'=\dfrac{1}{x}$，$k=\dfrac{1}{x_0}$，切线：$y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，

即$y=\dfrac{1}{x_0}x-1+\ln x_0$，$\therefore\begin{cases}\dfrac{1}{x_0}=a\\ \ln x_0-1=-3\end{cases}$　$\begin{cases}x_0=e^{-2}\\ a=e^2\end{cases}$，选D.

5．已知AD是$\triangle ABC$的边BC上的高，且$\overrightarrow{AB}=(1,3)$，$\overrightarrow{BC}=(6,3)$，则$\overrightarrow{AD}=$

A．$(1,-2)$　　B．$(-1,2)$　　C．$(2,-1)$　　D．$(-2,2)$

【答案】B

【解析】设$A(0,0)$，则$B(1,3)$，$C(7,6)$，$D(x,y)$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\therefore 6x+3y=0$

D在BC上，$\therefore y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$，$\begin{cases}6x+3y=0\\ y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}$，$\therefore\overrightarrow{AD}=(-1,2)$.

6．设点$A(0,4)$，抛物线$y^2=2px(p>0)$上的点P到y轴的距离为d.若$|PA|+d$的最小值为2，则$p=$

A．2　　B．3　　C．4　　D．6

【答案】D

【解析】$PA+d=PA+PF-\dfrac{p}{2}\geq AF-\dfrac{p}{2}=\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2+16}-\dfrac{p}{2}$

$\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2+16}-\dfrac{p}{2}=2$，$\therefore\dfrac{p}{2}=3$，$\therefore p=6$，选D.

7．已知$\{a_n\}$是等差数列，且$a_1=1$，$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_8a_9}=\frac{8}{25}$，则$a_{10}=$

A．15　　B．26　　C．28　　D．32

【答案】C

【解析】$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$，$\therefore\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_8a_9}$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_8}-\frac{1}{a_9}\right)=\frac{1}{d}\left(1-\frac{1}{a_9}\right)=\frac{1}{d}\left(1-\frac{1}{1+8d}\right)=\frac{8}{25},$$

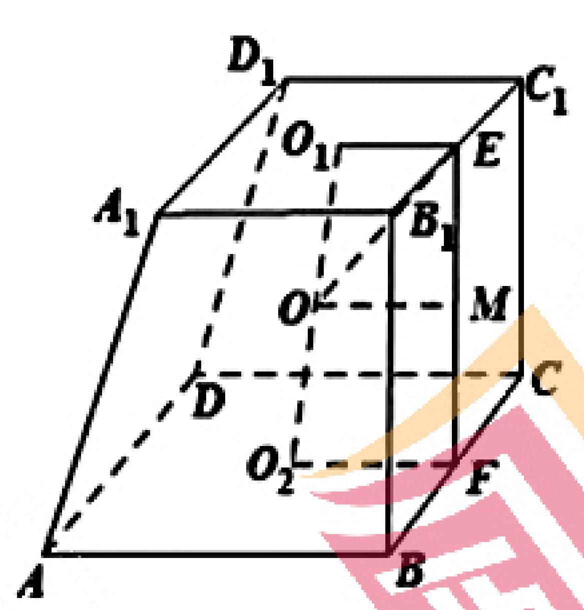
解得$d=3$，$\therefore a_{10}=a_1+9d=1+27=38$，选：C.

8．若一个小球与一个四棱台的每个面都相切，设四棱台的上、下底面积分别为S_1，S_2，侧面积为S，则

A．$S^2=S_1S_2$　　B．$S=S_1+S_2$　　C．$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$　　D．$S=2\sqrt{S_1S_2}$

【答案】C

【解析】分别取B_1C_1,BC的中点$E、F$，O为O_1O_2中点，过O作$OM\perp EF$于点M，



$\therefore OM\perp$平面BCC_1B_1，$\because$小球与四棱台的每个面都相切，$\therefore OO_1=OO_2=OM$，

$\triangle EO_1O\cong\triangle EMO$，$\therefore O_1E=EM$，且$O_2F=MF$，$\therefore EF=O_1E+O_2F$

且$O_1E=\frac{\sqrt{S_1}}{2}$，$O_2F=\frac{\sqrt{S_2}}{2}$，$\frac{(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})\cdot EF}{2}=\frac{S}{4}$，$\therefore EF=\frac{S}{2(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})}$

$\therefore\frac{S}{2(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})}=\frac{\sqrt{S_1}}{2}+\frac{\sqrt{S_2}}{2}\Rightarrow\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}=\sqrt{S}$，选：C.

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9．在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是菱形，P在底面上的射影E在线段BD上，则

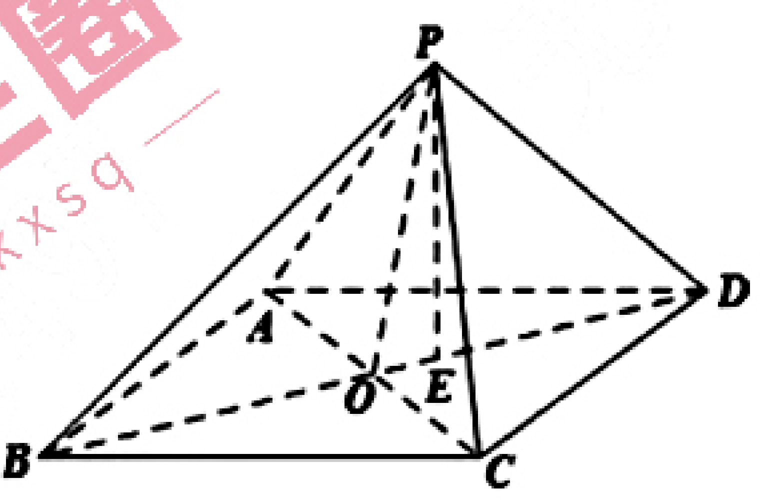
A．$PA=PC$　　B．$PB=PD$

C．$AC\perp$平面PBD　　D．$BD\perp$平面PAC

【答案】AC

【解析】$AC\perp BD$，$AC\perp PE$，$PE\cap BD=E$，$PE,BD\subset$平面PBD，$\therefore AC\perp$面PBD，C对.连AC与BD交于点O，$PO\subset$平面PBD，$\therefore PO\perp AC$，A对，选AC.

O与E不重合时，PB与PD不相等，B，D错.

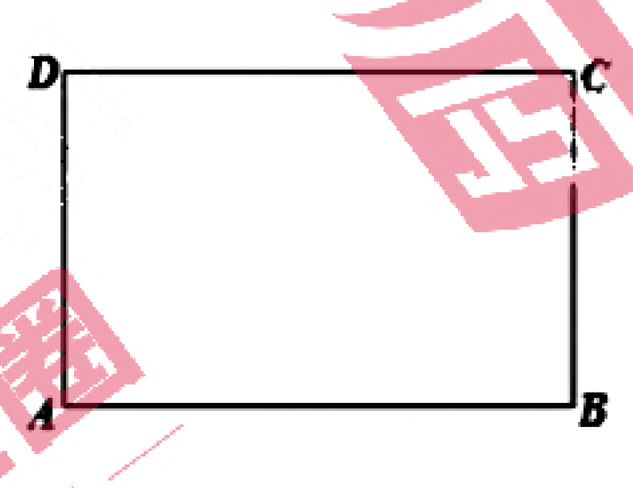


10．设矩形的长是宽的2倍，以该矩形的两个顶点为焦点的双曲线W经过另外两个顶点，则W的离心率的可能取值为

A．$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　　B．$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$2+\sqrt{5}$

【答案】ACD

【解析】如图，令$AB=2m$，$AD=m$，即$AC=m$



当A,B为焦点时，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{AB}{AC-BC}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，选A.

当A,D为焦点时，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{AD}{BD-BA}=\dfrac{m}{\sqrt{5}m-2m}=\sqrt{5}+2$，选D.

当A,C为焦点时，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{AC}{BA-BC}=\dfrac{\sqrt{5}m}{2m-m}=\sqrt{5}$，选C，$\therefore$选ACD

11．在生物科学和信息科学中，经常用到“S型”函数：$S(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$，其导函数为$S'(x)$，则

A．$S(x)$有极值点

B．点$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$是曲线$y=S(x)$的对称中心

C．$S'(x)$是偶函数

D．$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\left[S(x_0)-\dfrac{1}{2}\right]x_0<0$

【答案】BC

【解析】$S(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$，$S'(x)=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$，$S(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，$S(x)$无极值，A错.

对于B，$S(x)+S(-x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}+\dfrac{1}{1+e^x}=1$，$\therefore S(x)$关于$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$中心对称，B正确.

对于C，$S'(x)=\dfrac{1}{\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}$，$S'(-x)=S'(x)$，$\therefore S'(x)$为偶函数，C正确.

对于D，当$x\geq 0$时，$S(x)\geq S(0)=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\left[S(x)-\dfrac{1}{2}\right]x\geq 0$，

当$x<0$时，$S(x)<\dfrac{1}{2}$，$\therefore\left[S(x)-\dfrac{1}{2}\right]x>0$，$\therefore$对$\forall x\in\mathbf{R}$，$\left[S(x)-\dfrac{1}{2}\right]x\geq 0$，D错，

选：BC.

12．某工厂对生产的产品进行质量检测，检测包括两轮，每轮检测有A和B两种结果.第一轮是对所有生产产品进行检测，检测结果为B的产品定等级为乙；检测结果为A的产品需进行第二轮检测．在第二轮检测中，检测结果为B的产品定等级为乙；检测结果为A的产品定等级为甲.在每轮检测中，甲等品检测结果为A的概率是0.95，乙等品检测结果为A的概率是0.05.已知该厂生产的产品中甲等品的占比为90%，则

A．已知一件产品是乙等品，检测后定等级为甲的概率是0.0025

B．已知一件产品是甲等品，检测后定等级为乙的概率是0.0025

C．从检测后的产品中随机抽取一件，检测结果是甲等品的概率为0.8125

D．已知一件产品检测结果是甲等品，该产品检测前是乙等品的概率大于0.001

【答案】AC

【解析】对于A，$P=0.05$（第一轮乙等品检验结果为A）$\times 0.05$（第二轮检验结果也为A）$=0.0025$，A正确.

对于B，甲等品检测后等级为乙分为：①第一轮检测结果为B，②第一轮检测为A，第二轮检测为B，$\therefore P=0.05+0.95\times 0.05=0.0975$，B错.

对于C，一件产品检测结果为甲分为：①甲等品检测结果为甲；②乙等品检测结果为甲

$P=0.9\times 0.95\times 0.95+0.1\times 0.05\times 0.05=0.8125$，C正确.

对于D，记事件A为"一件产品检测结果是甲等品"，事件B为"该产品检测前是乙等品"，

$\therefore P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$且$P(A)=0.8125$，$P(AB)=0.1\times 0.05\times 0.05=0.00025$，

$\therefore P(B|A)=\dfrac{0.00025}{0.8125}<0.001$，D错，选：AC.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13．若一个五位数的各个数位上的数字之和为3，则这样的五位数共有______个.

【答案】15

【解析】5位数各个数位上的数字之和为3，有以下几种情形，

①有1个3，4个0，此时有1个结果；

②有1个2，1个1，3个0，此时有$C_2^1C_4^1=8$个结果；

③有3个1，2个0，此时有$A_3^2=6$个结果.

$1+8+6=15$.

14．已知圆C的半径为5，圆心C在第一象限，且直线$4x-3y=0$与x轴截圆C所得弦长都为6，则圆心C的横坐标为______.

【答案】8

【解析】设圆心$C(a,b)$，$a>0$，$b>0$，C到$4x-3y=0$距离$d=\frac{|4a-3b|}{5}$

C到x轴距离$d=6$，$\begin{cases}\frac{|4a-3b|}{5}=b\\ b^2+9=25\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a=8\\ b=4\end{cases}$，$\therefore C$的横坐标为8.

15．写出同时满足下列条件①②③的一个函数$f(x)=$________.

①$f(x)$是二次函数；②$xf(x+1)$是奇函数；③$\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上是减函数.

【答案】$f(x)=-x^2+2x$（答案不唯一，形如$f(x)=ax^2-2ax+c$，$a<0$，$c\geq 0$）

【解析】可取$f(x)=2x-x^2$，事实上答案不唯一，形如$f(x)=k(2x-x^2)+m$，$k>0$，$m\geq 0$均可.

16．把函数$y=\sin\omega x(\omega>0)$的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，得到函数$f(x)$的图象.若$f(x)$的图象关于原点对称，则ω的最小值为________；若曲线$y=f(x)$上存在唯一一点$A(x_0,f(x_0))$，$x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，满足点$A$关于原点的对称点$B$也在曲线$y=f(x)$上，则$\omega$的取值范围是________.

【答案】3；$(1,3)$

【解析】$f(x)=\sin\omega\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，$\because f(x)$图象关于原点对称，$\therefore f(x)$为奇函数，

$-\frac{\omega\pi}{3}=k\pi$，$\therefore\omega=-3k,k\in\mathbf{Z}$，$\because\omega>0$，当$k=-1$时，$\omega_{\min}=3$

$A(x_0,f(x_0))$与$B(-x_0,-f(x_0))$均在曲线$y=f(x)$上，

$$\begin{cases}\sin\omega\left(x_0-\frac{\pi}{3}\right)=f(x_0)\\ \sin\omega\left(-x_0-\frac{\pi}{3}\right)=-f(x_0)\end{cases}\quad\therefore\sin\left(\omega x_0-\frac{\omega\pi}{3}\right)=\sin\left(\omega x_0+\frac{\omega\pi}{3}\right)$$

$$\therefore\omega x_0+\frac{\omega\pi}{3}=\omega x_0-\frac{\omega\pi}{3}+2k\pi\text{或}\omega x_0-\frac{\omega\pi}{3}+\omega x_0+\frac{\omega\pi}{3}=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$$

$\therefore \omega = 3k$ 或 $2\omega x_0 = \pi + 2k\pi$ ，$\because$ 有唯一的 x_0 满足上述关系，

$\therefore$ 当 $\omega = 3k$ 时，有无穷多个 x_0 符合，舍去，$\therefore 2\omega x_0 = \pi + 2k\pi$ ，$\because 0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 0 < \frac{\pi + 2k\pi}{2\omega} < \frac{\pi}{2}$ 在 $k \in \mathbf{Z}$ 上有唯一解.

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2\omega} < \frac{\pi}{2}(k=0) \\ \frac{3\pi}{2\omega} \geq \frac{\pi}{2}(k=1) \end{cases} \Rightarrow 1 < \omega \leq 3 \text{，} \because \omega \neq 3k \text{，} \therefore \omega \neq 3 \text{，故} 1 < \omega < 3$$

$\therefore \omega$ 的取值范围为 $(1,3)$.

应填：3；$(1,3)$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 0$ ，且 $a_1 a_5 = 6 - a_3$ ，$a_6 = 16$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n = \begin{cases} \log_2 a_n, & n\text{为奇数}, \\ a_n + 1, & n\text{为偶数}, \end{cases}$ 求 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n}

【解析】

（1）因为 $a_1 a_5 = 6 - a_3$ ，所以 $a_3^2 + a_3 - 6 = 0$ ，解得 $a_3 = -3$ 或 $a_3 = 2$ ，

因为 $a_6 = a_3 q^3 = 16$ ，且 $q > 0$ ，

所以 $a_3 = 2$ 且 $q = 2$ ，所以 $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{1}{2}$.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为：$a_n = \frac{1}{2} \times 2^{n-1} = 2^{n-2}$

（2）当 n 为奇数时，$b_n = \log_2 a_n = n - 2$ ；

当 n 为偶数时，$b_n = a_n + 1 = 2^{n-2} + 1$ ，

所以 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 $S_{2n} = (b_1 + b_3 + \cdots + b_{2n-1}) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_{2n})$

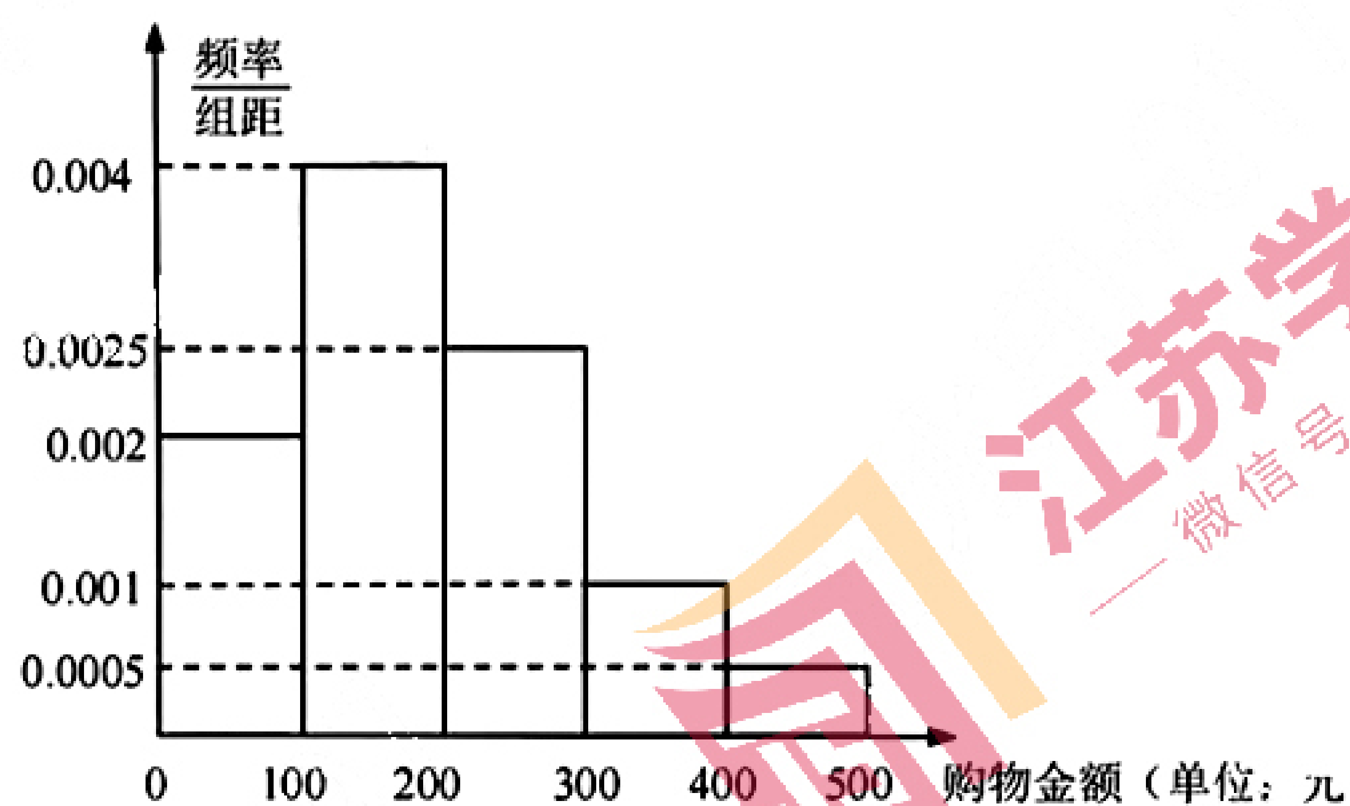
$= (-1 + 1 + \cdots + 2n - 3) + (1 + 2^2 + \cdots + 2^{2n-2}) + n$

$$=\frac{[illegible]}{2}+\frac{[illegible]}{1-4}+n=n^2-n+\frac{[illegible]}{3}$$

18．（12分）某超市准备在今年店庆日举行抽奖活动，凡购物金额超过 m 元的顾客参加一次抽奖．抽奖规则如下：从装有大小、形状完全相同的4个黑球2个红球的盒子中随机取2个小球，若2个小球都为红色，则获100元奖金；若2个小球为1红1黑，则获30元奖金；若2个小球都为黑色，则获10元奖金.

（1）记参加抽奖的一名顾客获得奖金为 X 元，求 X 的概率分布列和数学期望；

（2）该超市去年店庆日共有3000名顾客购物，统计购物金额得到如下的频率分布直方图.若今年抽奖活动总奖金预设为12000元，依据去年店庆日的数据，给出合理的 m 的值，并说明理由.



【解析】

（1）X 的可能取值为10，30，100，则

$$P(X=10)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{6}{15}；P(X=30)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}；P(X=100)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$$

所以，X 的概率分布列为：

X	10	30	100

（2）合理的m的值为300.

由这次抽奖活动派发的奖金总额为12000元，

由（1）知，参加抽奖的人平均每人获得奖金$\dfrac{80}{3}$元，

所以参加抽奖的人数约为$\dfrac{12000}{\dfrac{80}{3}}=450$

所以购物金额超过m元的频率为$\dfrac{450}{3000}=0.15$.

由频率分布直方图知，超过300元的频率为$0.001\times100+0.0005\times100=0.15$，

所以合理的m值为300.

19．（12分）记$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知$c=3b$，$\cos B+5\cos C=0$.

（1）求$\cos C$；

（2）若D是边AB上一点，$BC\perp CD$，且$CD=\sqrt{21}$，求$\triangle ABC$的面积.

【解析】

（1）因为$c=3b$，由正弦定理得，$\sin C=3\sin B$，①

因为$\cos B+5\cos C=0$，所以C为钝角，且$\cos^2 B=25\cos^2 C$，②

①式平方得，$\sin^2 C=9\sin^2 B$，所以$9\cos^2 B=8+\cos^2 C$

②式代入上式得，$\cos^2 C=\dfrac{1}{28}$，所以$\cos C=-\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

（2）**方法一**：由（1）得，$\cos B=-5\cos C=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，所以$\sin B=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$

在直角$\triangle BCD$中，$BD=\dfrac{CD}{\sin B}=14$，$a=BD\cdot\cos B=5\sqrt{7}$.

在$\triangle ACD$中，由正弦定理得，$\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$，

因为$\sin\angle ACD=\sin\left(\angle ACB-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos\angle ACB=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

$\sin\angle ADC=\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)=\cos B=\frac{5\sqrt{7}}{14}$，所以$AD=\frac{1}{5}AC=\frac{1}{5}b$，

所以$BD=3b-\frac{1}{5}b=\frac{14}{5}b=14$，所以$b=5$，

所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times5\sqrt{7}\times15\times\frac{\sqrt{21}}{14}=\frac{75\sqrt{3}}{4}$

方法二：由两角和公式，先求出$A=\frac{\pi}{3}$，

在$\triangle ACD$中，由正弦定理得$b=5$，所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{75\sqrt{3}}{4}$

方法三：由两角和公式，先求出$A=\frac{\pi}{3}$，

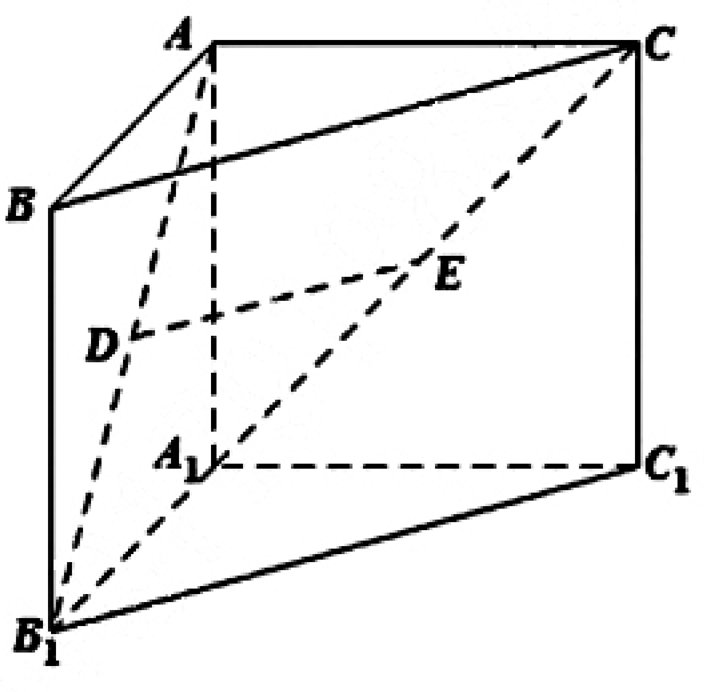
在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$a=\sqrt{7}b$，在$\triangle ACD$中，求出$b=5$，

所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{75\sqrt{3}}{4}$

20．（12分）如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB\perp AC$，$AB=AC=AA_1=4$，两个质点分别从点A和点C同时出发，均以每秒$\sqrt{2}$个单位长度的速度分别向点B_1，A_1作直线移动．如图，点D,E分别是两质点移动$t(0<t<4)$秒后到达的位置.

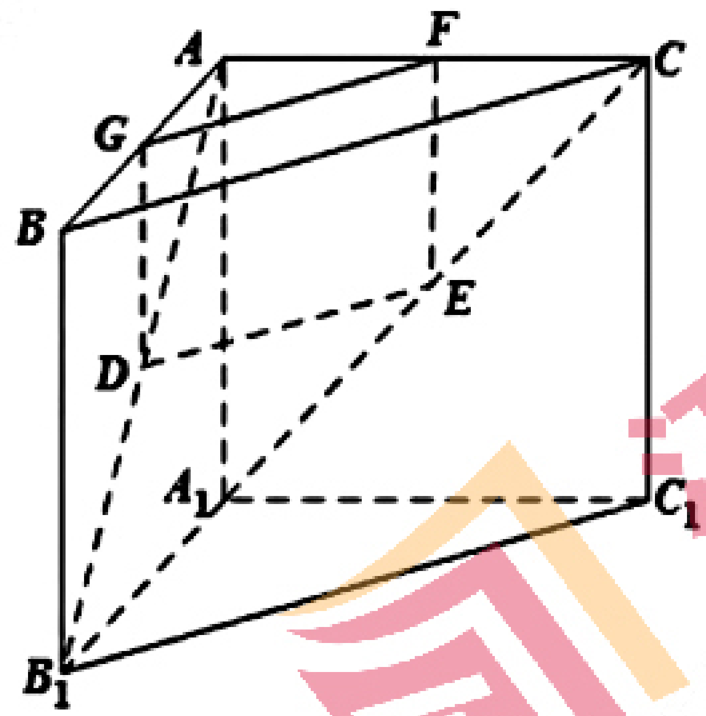
（1）证明：DE // 平面ABC；

（2）当三棱锥C_1-A_1DE的体积最大时，求直线C_1D与平面A_1DE所成角的正弦值.



【解析】

解析一：



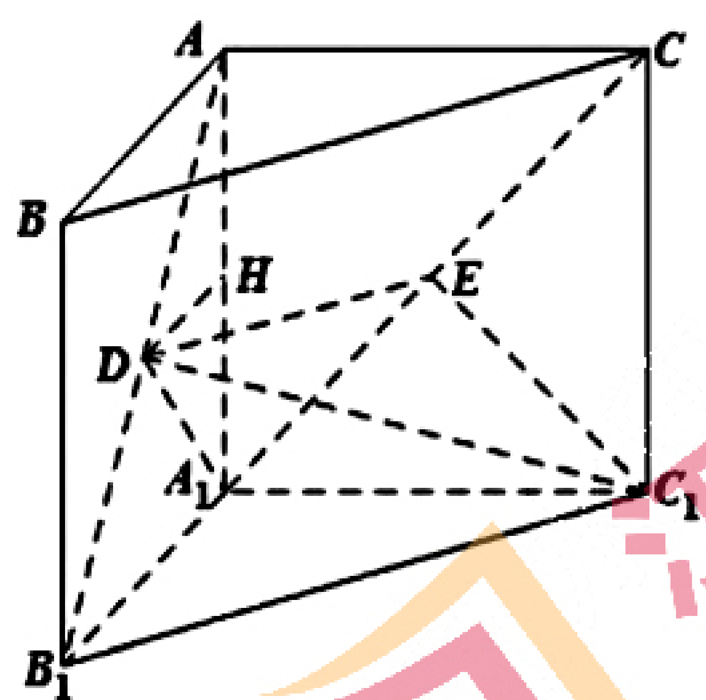
则 $EF \parallel DG$，且 $\dfrac{EF}{AA_1}=\dfrac{CE}{CA_1}$，$\dfrac{DG}{AA_1}=\dfrac{AD}{AB_1}$.

因为 $CE=AD$，$CA_1=AB_1$，所以 $EF=DG$

所以四边形 $DEFG$ 是平行四边形，所以 $DE \parallel GF$.

因为 $GF\subset$ 平面 ABC，$DE\not\subset$ 平面 ABC，所以 $DE\parallel$ 平面 ABC.

（2）过 D 作 $DH\perp AA_1$，垂足为 H.



在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，因为 $AB\perp AC$，

所以平面 $A_1B_1BA\perp$ 平面 A_1C_1CA，所以 $DH\perp$ 平面 A_1C_1E.

所以三棱锥 C_1-A_1DE 的体积

$$V_{C_1-A_1DE}=V_{D-A_1C_1E}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1C_1E}\cdot DH=\frac{2}{3}t(4-t)\le\frac{2}{3}\times\left[\frac{t+(4-t)}{2}\right]^2=\frac{8}{3},$$

当且仅当 $t=2\in(0,4)$，即 D 为 AB_1 的中点时取等号.此时 E 为 A_1C 的中点.

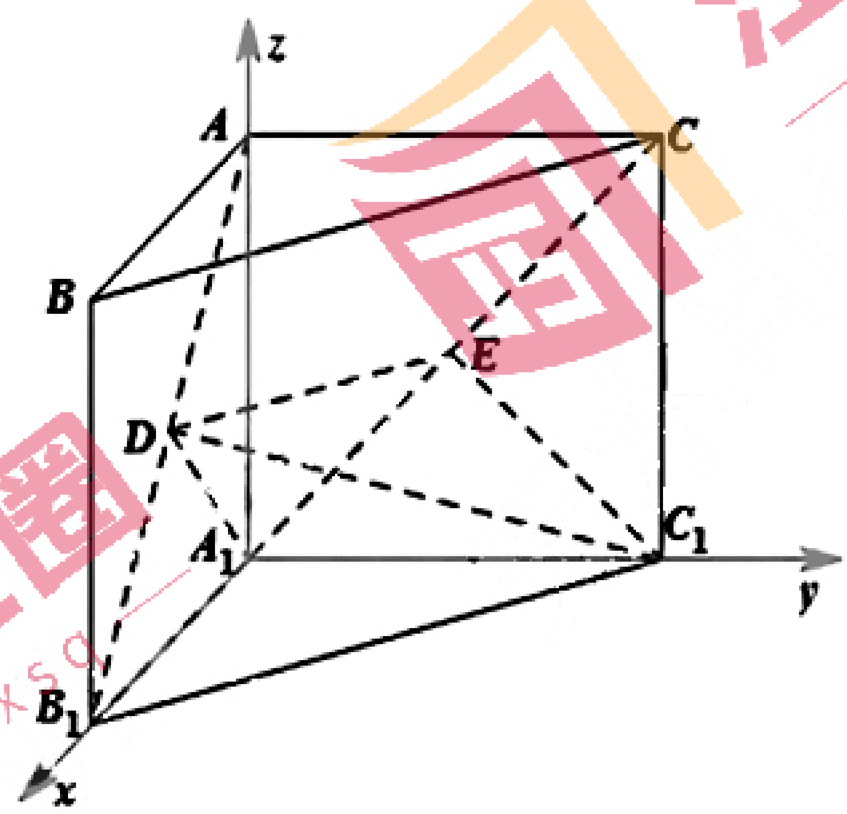
所以 $C_1D=2\sqrt{6}$，$DE=2\sqrt{2}$，$A_1D=A_1E=2\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle A_1DE}=2\sqrt{3}$.

设点 C_1 到平面 A_1DE 的距离为 d，则 $\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle A_1DE}\times d=\dfrac{8}{3}$，所以 $d=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

设直线C_1D与平面A_1DE所成的角为θ，则$\sin\theta=\dfrac{d}{C_1D}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

解析二：

（1）以$\left\{\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1C_1},\overrightarrow{A_1A}\right\}$为基底，建立空间直角坐标系，则



$A_1(0,0,0)$，$B_1(4,0,0)$，$C_1(0,4,0)$，$A(0,0,4)$，

$\overrightarrow{AD}=\sqrt{2}t\cdot\dfrac{\overrightarrow{AB_1}}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right|}=(t,0,-t)$，$\overrightarrow{CE}=\sqrt{2}t\cdot\dfrac{\overrightarrow{CA_1}}{\left|\overrightarrow{CA_1}\right|}=(0,-t,-t)$，

所以$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{AD}=(-t,4-t,0)$.

因为平面ABC的一个法向量$\vec{m}=(0,0,1)$，所以$\overrightarrow{DE}\cdot\vec{m}=0$，即$\overrightarrow{DE}\perp\vec{m}$.

因为$DE\not\subset$平面ABC，所以$DE\,/\!/$平面ABC.

（2）同法一，当D,E分别为AB_1,A_1C的中点时，三棱锥C_1-A_1DE的体积最大.

此时，$\overrightarrow{A_1D}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{A_1E}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{C_1D}=(2,-4,2)$.

设平面A_1DE的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{A_1D},\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{A_1E}\end{cases}$即$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=2x+2z=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1E}=2y+2z=0,\end{cases}$取$\vec{n}=(1,1,-1)$.

设直线C_1D与平面A_1DE所成的角为θ，

则$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{C_1D}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{C_1D}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{C_1D}\right|}=\dfrac{4}{\sqrt{3}\times2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

21．（12分）已知函数$f(x)=\ln^2x-ax$.

（1）若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，求 a 的取值范围；

（2）若 $f(x)$ 的最小值为 3，求 a.

【解析】

（1）因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f'(x)\le 0$，

因为 $f'(x)=\dfrac{2\ln x-ax}{x}$，所以 $\dfrac{2\ln x-ax}{x}\le 0$，即 $a\ge\dfrac{2\ln x}{x}$

设 $g(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$

当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上递增；

当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上递减；

所以 $a\ge g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$

所以 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{2}{\mathrm{e}},+\infty\right)$

（2）因为 $f(x)$ 的最小值为 3，由 $f(1)=-a\ge 3$，得 $a\le -3$.

当 $a\le -3$ 时，设 $h(x)=2\ln x-ax$，则 $h'(x)=\dfrac{2-ax}{x}>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

因为 $h\left(\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}\right)=a\left(1-\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}\right)<0$，$g(1)=-a>0$，

所以存在 $x_0>0$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)<0$，

即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上递增；

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=\ln^2 x_0-ax_0=3$.

因为 $2\ln x_0-ax_0=0$，所以 $\ln^2 x_0-2\ln x_0-3=0$，

解得 $\ln x_0=-1$，或 $\ln x_0=3$，即 $x_0=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，或 $x_0=\mathrm{e}^3$

所以$a=-2e$，或$a=\frac{6}{e^3}$（舍）.

所以a的值为$-2e$.

22．（12分）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，斜率为2的直线$l$与$x$轴交于点$M$，$l$与$C$交于$A$，$B$两点，$D$是$A$关于$y$轴的对称点.当$M$与原点$O$重合时，$\triangle ABD$面积为$\frac{16}{9}$.

（1）求C的方程；

（2）当M异于O点时，记直线BD与y轴交于点N，求$\triangle OMN$周长的最小值.

【解析】

解析一：（1）因为$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，

所以$a^2=2c^2$，$b^2=c^2$，即C的方程为$\frac{x^2}{2c^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$

设$A(x_0,2x_0)$，则$\frac{x_0^2}{2c^2}+\frac{4x_0^2}{c^2}=1$，即$c^2=\frac{9}{2}x_0^2$，

因为$B(-x_0,-2x_0)$，$D(-x_0,2x_0)$，

所以$\triangle ABD$面积$\frac{1}{2}\cdot|2x_0|\cdot|4x_0|=\frac{16}{9}$，所以$x_0^2=\frac{4}{9}$，所以$c^2=2$，

故C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

（2）设直线$l:y=2x+m$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$D(-x_1,y_1)$，

联立直线l与椭圆C的方程，消去y得$9x^2+8mx+2m^2-4=0$，

当$\Delta=144-8m^2>0$，即$0<m^2<18$时，

$x_1+x_2=-\frac{8m}{9}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-4}{9}$，

在直线l方程中令$y=0$，得$x=-\frac{m}{2}$，所以$M\left(-\frac{m}{2},0\right)$

所以$|OM|=\left|\frac{m}{2}\right|\in\left(0,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

因为直线BD方程为：$y=\frac{y_2-y_1}{x_2+x_1}(x+x_1)+y_1$，令$x=0$得

$$|y_N|=\left|\frac{x_1y_2+x_2y_1}{x_1+x_2}\right|=\left|\frac{x_1(2x_2+m)+x_2(2x_1+m)}{x_1+x_2}\right|=\left|\frac{4x_1x_2+m(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\right|$$

$$=\left|\frac{4\cdot\frac{2m^2-4}{9}+m\cdot\left(-\frac{8m}{9}\right)}{-\frac{8m}{9}}\right|=\frac{2}{|m|}.$$

则$\triangle OMN$的周长$L=|OM|+|ON|+|MN|=\left|\frac{m}{2}\right|+\left|\frac{2}{m}\right|+\sqrt{\left|\frac{m}{2}\right|^2+\left|\frac{2}{m}\right|^2}$

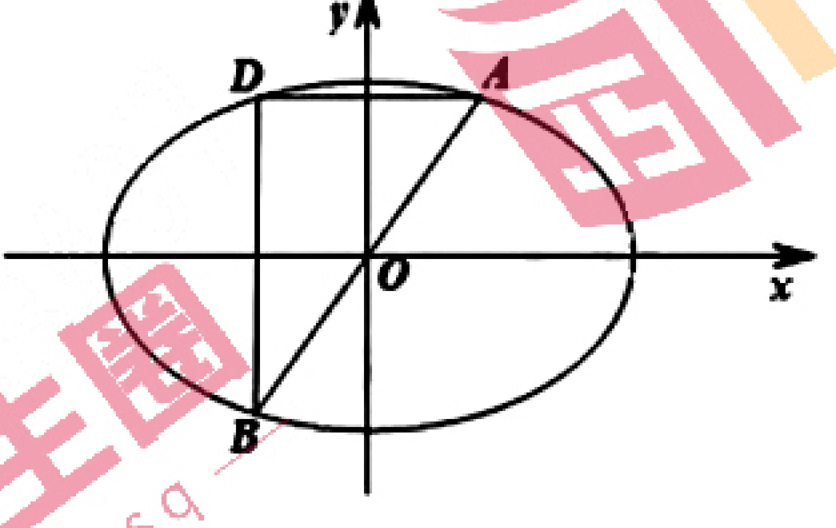
因为$\left|\frac{m}{2}\right|+\left|\frac{2}{m}\right|\geq 2\sqrt{\left|\frac{m}{2}\right|\cdot\left|\frac{2}{m}\right|}=2$，$\left|\frac{m}{2}\right|^2+\left|\frac{2}{m}\right|^2\geq 2\sqrt{\left|\frac{m}{2}\right|^2\cdot\left|\frac{2}{m}\right|^2}=2$，

当且仅当$|m|=2$时，同时取等号，

所以当$|m|=2$时，$\triangle OMN$的周长取得最小值，最小值为$2+\sqrt{2}$.

解析二：

（1）$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore a=\sqrt{2}b$，椭圆方程$\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，

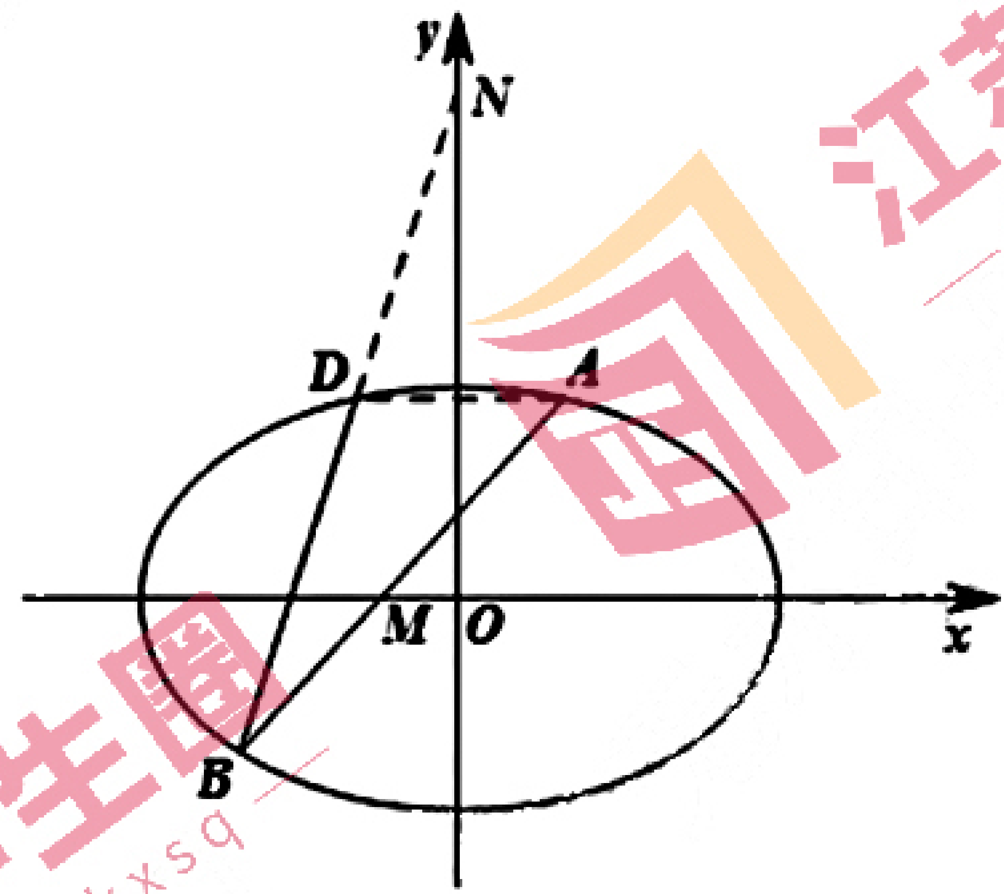


不妨设A在第一象限，$\begin{cases}y=2x\\x^2+2y^2=2b^2\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{2}}{3}b,\frac{2\sqrt{2}}{3}b\right)$，$\therefore B\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}b,-\frac{2\sqrt{2}}{3}b\right)$.

$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}b\times\frac{4\sqrt{2}}{3}b=\frac{16}{9}$，$\therefore b=\sqrt{2}$，

椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

（2）设直线AB的方程为$y=2x+m$，$m\neq 0$，$M\left(-\dfrac{m}{2},0\right)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，



$$\begin{cases}y=2x+m\\ x^2+2y^2=4\end{cases}\Rightarrow 9x^2+8mx+2m^2-4=0$$

$\Delta=64m^2-36(2m^2-4)=8(18-m^2)>0$，$-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$且$m\neq 0$，

$D(-x_1,y_1)$，直线BD方程为：$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2+x_1}(x+x_1)+y_1$，

令$x=0\Rightarrow y_N=\dfrac{x_1y_2-x_1y_1+x_1y_1+x_2y_1}{x_2+x_1}$

$$=\frac{x_1(2x_2+m)+x_2(2x_1+m)}{x_1+x_2}=\frac{4x_1x_2+m(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$$

$$=\frac{4\cdot\dfrac{2m^2-4}{9}+m\cdot\dfrac{-8m}{9}}{-\dfrac{8m}{9}}=\frac{2}{m}，$$

$\therefore\triangle OMN$的周长为$l_{\triangle OMN}=\left|\dfrac{m}{2}\right|+\left|\dfrac{2}{m}\right|+\sqrt{\dfrac{m^2}{4}+\dfrac{4}{m^2}}$，记$\left|\dfrac{m}{2}\right|+\left|\dfrac{2}{m}\right|=t,t\geq 2$

$\therefore l_{\triangle OMN}=t+\sqrt{t^2-2}\geq 2+\sqrt{2}$，当且仅当$m=\pm 1$时取“=”

$\therefore\triangle OMN$周长的最小值为：$2+\sqrt{2}$.