2024年1月“七省联考”押题预测卷04

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $P=\{1,2,3,4,5\}$，$Q=\{x|(x-1)(x-3)\le 0\}$，则 $P\cap Q=$（　　）

A. $\{2\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{1,2,3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

2．设复数 z 在复平面内对应的点在第二象限，则复数 $z(1+\mathrm{i})^{12}$ 在复平面内对应的点在（　　）

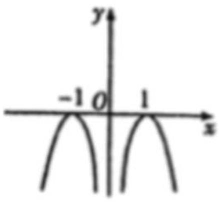
A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

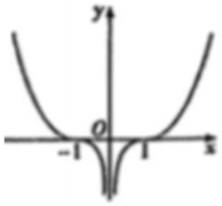
3．已知 $\vec{a}=(m,-2)$，$\vec{b}=(3,4)$，若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，则 $\left|\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}\right|=$（　　）

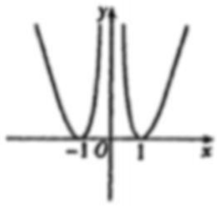
A. 20　　B. 15　　C. 10　　D. 5

4．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，满足 $f(|x|)=f(x)$．当 $x<0$ 时 $f(x)=\left(\frac{1}{x}-x\right)\ln x^2$，则 $f(x)$ 的大致图象为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

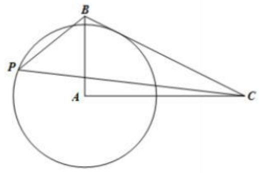
5．已知 O 为坐标原点，点A在 x 轴正半轴上，点 P 在第一象限，且 $\angle AOP=\alpha$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，点 Q 在第四象限，且 $\angle AOQ=\beta$，α，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$OP\perp OQ$，则 $\sin(\alpha-\beta)=$（　　）

A. $-\frac{7}{25}$　　B. $\frac{7}{25}$　　C. $-\frac{24}{25}$　　D. $\frac{24}{25}$

6．已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，$A(-1,0)$，点 P 是抛物线上的动点，则当 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 的值最小时，$|PF|=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

7．已知直角三角形 *ABC* 中，$\angle A=90°$，*AB*=2，*AC*=4，点 *P* 在以 *A* 为圆心且与边 *BC* 相切的圆上，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最大值为（　　）



A. $\frac{16+16\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{16+8\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{16}{5}$　　D. $\frac{56}{5}$

8．设函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+a\ln x$，若函数 $y=f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，且不等式 $f(x_1)+f(x_2)\geq x_1+x_2+t$ 恒成立，则 t 的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(-\infty,-16-8\ln 2]$　　C. $\left(-\infty,\frac{e^2}{2}-4e\right]$　　D. $(-\infty,-13]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．已知一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为不全相等的 n 个正数，其中 $n\geq 4$，若由 $y_k=3x_k-2\left(k=1,2,\cdots,n\right)$ 生成一组新的数据 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，则这组新数据与原数据中可能相等的量有（　　）

A. 极差　　B. 平均数　　C. 中位数　　D. 标准差

10．在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，P 在底面上的射影 E 在线段 BD 上，则（　　）

A. $PA=PC$　　B. $PB=PD$

C. $AC\perp$ 平面 PBD　　D. $BD\perp$ 平面 PAC

11．已知双曲线 C：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，右顶点为 E，过 F_2 的直线交双曲线 C 的右支于 A，B 两点（其中点 A 在第一象限内），设 M，N 分别为 $\triangle AF_1F_2$，$\triangle BF_1F_2$ 的内心，则（　　）

A. 点 M 的横坐标为 2

B. 当 $F_1A\perp AB$ 时，$|AF_1|=1+\sqrt{7}$

C. 当 $F_1A\perp AB$ 时，$\triangle ABF_1$ 内切圆的半径为 $-1+\sqrt{7}$

D. $|ME||NE|=1$

12．投掷一枚质地不均匀的硬币，已知出现正面向上的概率为 p，记 A_n 表示事件“在 n 次投掷中，硬币正面向上出现偶数次”，则下列结论正确的是（　　）

A. A_2 与 $\overline{A_2}$ 是互斥事件　　B. $P\left(A_2\right)=p^2$

C. $P\left(A_{n+1}\right)=(1-2p)P\left(A_n\right)+p$　　D. $P\left(A_{2n}\right)>P\left(A_{2n+2}\right)$

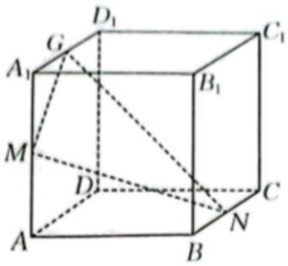
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．将函数 $f(x)=\sin x$ 图象上每一点的横坐标缩短为原来的一半，纵坐标不变，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)=$______.

14. 某医院安排王医生、李医生、赵医生、张医生、孙医生 5 人到三个社区开展主题为“提高免疫力，预防传染病”的知识宣传活动，要求每人只能参加一个社区的活动，每个社区必须有人宣传，若李医生、张医生不安排在同一个社区，孙医生不单独安排在一个社区，则不同的安排方法有______种.

15. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_5=5$，$\{b_n\}$ 是等比数列，满足 $a_nb_n=(n+1)2^n$，则 $S_n=$_______.

16．如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，M，N，G 分别是棱 AA_1，BC，A_1D_1 的中点，平面 MGN 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面面积为________.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，前 n 项和为 S_n，若 $a_{n+1}+a_{n+2}=12a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，$S_5=121$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

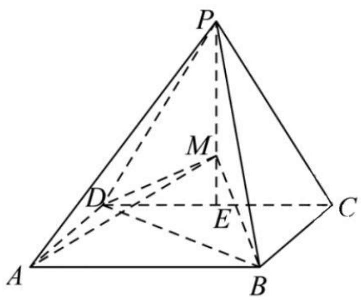
（2）若 $b_n=a_n+\ln a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18．在$\triangle ABC$中，$a=\sqrt{19}$，且$\dfrac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos A}=\dfrac{\cos B-\cos A}{\sin C}$

（1）求角A；

（2）若点D为BC边上一点，$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{3}{4}$且$AD\perp AC$，求$\triangle ABC$的面积.

19．如图，四棱锥$P-ABCD$的底面为矩形，平面$PCD\perp$平面$ABCD$，$\triangle PCD$是边长为2等边三角形，$BC=\sqrt{2}$，点E为CD的中点，点M为PE上一点（与点P，E不重合）.



（1）证明：$AM\perp BD$；

（2）当AM为何值时，直线AM与平面BDM所成的角最大？

20．已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{e^{x}}\left(x\in \mathrm{R}\right)$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）若对于任意的 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right], f\left(x\right)\geq kx$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

21．某公司为激励员工，在年会活动中，该公司的 $n\left(n\geq 3\right)$ 位员工通过摸球游戏抽奖，其游戏规则为：每位员工前面都有 1 个暗盒，第 1 个暗盒里有 3 个红球与 1 个白球.其余暗盒里都恰有 2 个红球与 1 个白球，

这些球的形状大小都完全相同.第 1 位员工从第 1 个暗盒里取出 1 个球，并将这个球放入第 2 个暗盒里，第 2 位员工再从第 2 个暗盒里面取出 1 个球并放入第 3 个暗盒里，依次类推，第 $n-1$ 位员工再从第 $n-1$ 个暗盒里面取出 1 个球并放入第 n 个暗盒里.第 n 位员工从第 n 个暗盒中取出 1 个球，游戏结束.若某员工取出的球为红球，则该员工获得奖金 1000 元，否则该员工获得奖金 500 元.设第 $i\left(1\le i\le n\right)$ 位员工获得奖金为 X_i 元.

（1）求 $X_2=1000$ 的概率；

（2）求 X_i 的数学期望 $E\left(X_i\right)$，并指出第几位员工获得奖金额的数学期望最大.

22．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，斜率为 2 的直线 l 与 x 轴交于点 M，l 与 C 交于 A，B 两点，D 是 A 关于 y 轴的对称点．当 M 与原点 O 重合时，$\triangle ABD$ 面积为 $\dfrac{16}{9}$．

（1）求 C 的方程；

（2）当 M 异于 O 点时，记直线 BD 与 y 轴交于点 N，求 $\triangle OMN$ 周长的最小值．