西安中学 2023-2024 学年度第一学期期末考试

高三 数学（理科）试题

（时间：120 分钟　满分：150 分）　命题人：李珍

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．若复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　　D．3

2. 已知集合 $U=\{-2,-1,0,1,2\}$，$A=\{0\}$，$B=\{x\mid x^2+x-2<0\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$（　）.

A．$\{-1\}$　　B．$\{1\}$　　C．$\{-1,1,2\}$　　D．$\{-2,-1,1\}$

3. 向量 $\vec{a}=(1,-1),\vec{b}=(m,3)$，且 $(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{a}$，则 $m=$（　　）

A．2　　B．1　　C．0　　D．-1

4. 若实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y\geq 0\\ x+y-3\leq 0\\ y\geq -1\end{cases}$，则 $z=x-2y$ 的取值范围为（　）

A．$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$　　B．$[-5,+\infty)$　　C．$\left[\frac{3}{2},6\right]$　　D．$[-3,6]$

5. 设 $x\in R$，则“$|x-2|<1$”是“$x^2+x-2>0$”的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6. 塑料袋给我们生活带来了方便，但塑料在自然界可停留长达 200~400 年之久，给环境带来了很大的危害，国家发改委、生态环境部等 9 部门联合发布《关于扎实推进污染物治理工作的通知》明确指出，2021 年 1 月 1 日起，禁用不可降解的塑料袋、塑料餐具及一次性塑料吸管等，某品牌塑料袋经自然降解后残留量 y 与时间 t 年之间的关系为 $y=y_0\cdot e^{kt}$，其中 y_0 为初始量，k 为光解系数.已知该品牌塑料袋 2 年

后残留量为初始量的75%.该品牌塑料袋大约需要经过（　）年，其残留量为初始量的 10%.（参考数据：$\lg 2\approx 0.301$，$\lg 3\approx 0.477$）

A．20　　B．16　　C．12　　D．7

7.若$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则$\cos\left(\dfrac{11\pi}{6}-\alpha\right)=$（　）

A．$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$-\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

8. 已知正三棱锥$P-ABC$的侧棱PA，PB，PC两两垂直，且$PA=PB=PC=1$，以P为球心的球与底面ABC相切，则该球的半径为（　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

9. 关于函数$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x+1$有下述四个结论，其中结论错误的是（　　　）

A．$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2$　　B．$f(x)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{3}$对称

C．$f(x)$的图象关于$\left(\dfrac{7}{24}\pi,0\right)$对称　　D．$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$上单调递增

10.高斯是德国著名数学家，近代数学的奠基者之一，享有“数学王子”的称号，用他名字定义的函数$f(x)=[x]$称为高斯函数，其中$[x]$表示不超过x的最大整数，如$[2.3]=2$，$[-1.9]=-2$，已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=5$，$a_{n+2}+4a_n=5a_{n+1}$，若$b_n=[\log_2 a_{n+1}]$，S_n为数列$\left\{\dfrac{8100}{b_n\cdot b_{n+1}}\right\}$的前 n 项和，则$[S_{2025}]=$（　　　）

A．2026　　B．2025　　C．2024　　D．2023

11. 设$a=\dfrac{17}{18}$，$b=\cos\dfrac{1}{3}$，$c=3\sin\dfrac{1}{3}$，则下列正确的是（　）

A．$b>a>c$　　B．$c>a>b$　　C．$b>c>a$　　D．$c>b>a$

12.已知O为坐标原点，点$A(-2,-1)$在抛物线$C:x^2=-2py$（$p>0$）上，过点$B(0,1)$的直线交抛物线C于P,Q两点，其中正确结论的个数有（　）

①抛物线C的准线方程为$y=1$　　②直线AB与抛物线C相切

③$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$为定值 5　　④$|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

二、填空题（本大题共 4 小题，共 20 分）

13. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 5 项和$S_5=35$，且满足$a_5=13a_1$，则等差数列$\{a_n\}$的公差为________.

14. 已知圆 C的圆心在x轴的正半轴上，圆 C与圆$M:(x+2)^2+y^2=4$外切，写出一个圆 C的标准方程：______.

15. 在边长为 2 的正三角形ABC中，D是BC的中点，$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$，$CE$交$AD$于 F. 则$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}=$____________.

16.已知函数$f(x)=x+\dfrac{k}{x}$的定义域为$(0,+\infty)$，其最小值为 2．点M是函数图象上的任意一点，过点M分别作直线$l:y=x$和y轴的垂线，垂足分别为A,B．其中O为坐标原点．给出下列四个结论：①$k=1$；　②不存在点M，使得$|MA|=2023$；

③$|MA|\cdot|MB|$的值恒为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　　④四边形$OAMB$面积的最小值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$.

其中，所有正确结论的序号是__________.

三、解答题：本大题共 7 小题，第 17—21 题为必考题，第 22、23 题为选考题）

（一）必考题：共 60 分

17.（本小题满分 12 分）

造林绿化对生态发展特别是在防风固沙、缓解温室效应、净化空气、涵养水源等方面有着重要意义．某苗木培养基地为了对某种树苗的高度偏差 x（单位：cm）与树干最大直径偏差 y（单位：mm）之间的关系进行分析，随机挑选了 8 株该品种的树苗，得到它们的偏差数据（偏差是指个别测定值与测定的平均值之差）如下：

树苗序号	1	2	3	4	5	6	7	8
高度偏差 x	20	15	13	3	2	-5	-10	-18
直径偏差 y	6.5	3.5	3.5	1.5	0.5	-0.5	-2.5	-3.5

(1)若 x 与 y 之间具有线性相关关系，求 y 关于 x 的线性回归方程；

(2)若这种树苗的平均高度为120cm，树干最大直径平均为31.5mm，试由（1）的结论预测高度为128cm 的这种树苗的树干最大直径为多少毫米．

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{8}x_iy_i=324$，$\sum\limits_{i=1}^{8}x_i^2=1256$．参考公式：回归直线方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中斜率和截距的最小二乘估计：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$．

18.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且 $a\cos B+b\sin A=c$．

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $a=\sqrt{2}$，△ABC 的面积为 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$，求 $b+c$ 的值．

19.（本小题满分 12 分）

设椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，圆$O:x^2+y^2=2$与$x$轴正半轴交于点$A$，圆$O$在点$A$处的切线被椭圆$C$截得的弦长为$2\sqrt{2}$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）过圆O上任意一点作圆的的切线交椭圆C于点M，N，求证：以MN为直径的圆过点O.

20.（本小题满分 12 分）

如图 1 所示，在四棱锥$P-ABCD$中，四边形$ABCD$为梯形，$CD//AB, AB\perp BC, PA\perp PD$，$BC=CD=PA=PD=1, AB=2$，平面$PAD\perp$平面$PBC$.

(1)若PB的中点为N，求证：$CN//$平面PAD；

(2)求二面角$P-AD-B$的正弦值.

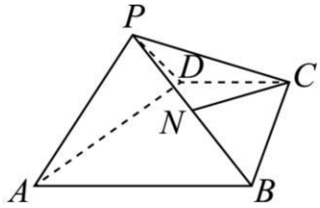


图 1

21.（本小题满分 12 分）

已知$f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}e^x$，$g(x)=a(x+1)$.

(1)求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程;

(2)当$a>0$时，若关于x的方程$f(x)+g(x)=0$存在两个正实数根$x_1,x_2(x_1<x_2)$，证明:$a>e^2$且$x_1x_2<x_1+x_2$.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）[选修 4—4：坐标系与参数方程]

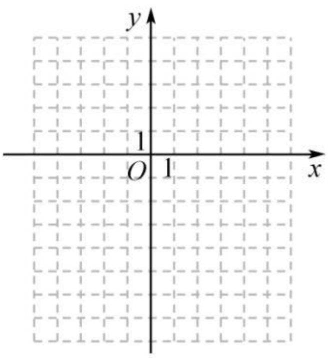
在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sin\alpha \\ y=\sqrt{3}\cos\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数），以坐标原点为极点，以 x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$.

(1)写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

(2)设点 P 在 C_1 上，点 Q 在 C_2 上，求 $|PQ|$ 的最小值以及此时 P 的直角坐标.

23.（本小题满分 10 分）[选修 4—5：不等式选讲]

设函数 $f(x)=|x+1|-3|x-1|$.



(1)作出函数 $f(x)$ 的图象，并求 $f(x)$ 的值域；

(2)若存在 x，使得不等式 $f(x)\geq|4x-a|$ 成立，求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。