秘密★启用前

2023–2024学年高三年级一轮复习终期考试
数学参考答案详解及评分说明

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. B

【解析】在数轴上表示出集合A，若$A\cup B=\mathbf{R}$，则由数轴易知$m\geqslant 1$，所以实数m的取值范围是$[1,+\infty)$，故选B.

2. C

【解析】由题意得$z^2-4z+4=-1$，即$(z-2)^2=-1$，得$z=2\pm\mathrm{i}$，故$|z|=\sqrt{5}$，故选C.

3. B

【解析】由题意可得，$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$，可得$|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>+|\boldsymbol{b}|^2=17$，$|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{b}|-8=0$，解得$|\boldsymbol{b}|=4$．故选B.

4. C

【解析】在等比数列$\{a_n\}$中，$S_4,S_8-S_4,S_{12}-S_8,S_{16}-S_{12}$也成等比数列．因为$S_4=2,S_8=8$，所以$S_8-S_4=6$，所以$S_{12}-S_8=18,S_{16}-S_{12}=54$，所以$S_{16}=80$，故选C.

5. C

【解析】因为射线PN平分$\angle F_1PF_2$，$2\overrightarrow{F_1N}=3\overrightarrow{NF_2}$，

$\therefore \dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}=\dfrac{3}{2}$，

由双曲线定义知：$|PF_1|-|PF_2|=2a$，$|PF_1|=6a$，$|PF_2|=4a$，

在$\triangle F_1PF_2$中，由余弦定理得：$|PF_1|^2+|PF_2|^2=2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos 60^\circ=4c^2$，得$4c^2=28a^2$，

$\therefore$双曲线E的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{7}$．故选C.

6. A

【解析】由题意知$\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha,\end{cases}$由$xy\neq 0$知$\sin\alpha\neq 0$，由$\tan 2\alpha+\sin\alpha=0$得$\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}+\sin\alpha=0$，

$\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-1}+\sin\alpha=0$，又$\sin\alpha\neq 0$，故$\dfrac{2\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-1}+1=0$，整理得$2\cos^2\alpha+2\cos\alpha-1=0$，

解得$\cos\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$或$\cos\alpha=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}<-1$（舍），于是$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

故$x-y^2=2\cos\alpha-4\sin^2\alpha=2\times\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}-4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-1-\sqrt{3}$，故选A.

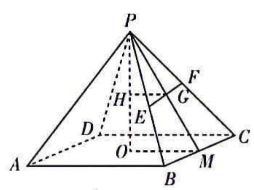
7. B

【解析】如图：由题得$PM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 56=28\sqrt{3}$，$OM=28$，$PO=28\sqrt{2}$，

由三角形PHG与三角形POM相似得$\dfrac{PH}{PO}=\dfrac{HG}{OM}$，即$\dfrac{28\sqrt{2}-28}{28\sqrt{2}}=\dfrac{HG}{28}$，

解得$HG=28-14\sqrt{2}$，所以棱台的上底面的边长为$56-28\sqrt{2}$，所以棱台的体积为

$\dfrac{1}{3}\times\left[(56-28\sqrt{2})^2+(56-28\sqrt{2})\times 56+56^2\right]\times 28=40977.1$，故选B.



第7题答图

8. B

【解析】因为$f(x)=2x-e+\ln\frac{ex}{e-x}$,

所以$f(x)+f(e-x)=2x-e+\ln\frac{ex}{e-x}+2(e-x)-e+\ln\frac{e(e-x)}{e-(e-x)}$

$=\ln\frac{ex}{e-x}+\ln\frac{e(e-x)}{x}=\ln(\frac{ex}{e-x}\cdot\frac{e(e-x)}{x})=\ln e^2=2$,

令$S=f\left(\frac{e}{2024}\right)+f\left(\frac{2e}{2024}\right)+\cdots+f\left(\frac{2022e}{2024}\right)+f\left(\frac{2023e}{2024}\right)$

则$2S=\left(f\left(\frac{e}{2024}\right)+f\left(\frac{2023e}{2024}\right)\right)+\left(f\left(\frac{2e}{2024}\right)+f\left(\frac{2022e}{2024}\right)\right)+\cdots+\left(f\left(\frac{2023e}{2024}\right)+f\left(\frac{e}{2024}\right)\right)=2\times2023$,

所以$S=2023$,所以$\frac{2023}{2}(a+b)=2023$,所以$a+b=2$,其中$a>0,b>0,a=2-b$.

所以$\frac{1}{2a}+\frac{a}{b}=\frac{1}{2a}+\frac{2-b}{b}=\frac{1}{2a}+\frac{2}{b}-1=\left(\frac{1}{2a}+\frac{2}{b}\right)\cdot\frac{(a+b)}{2}-1$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}+\frac{b}{2a}+\frac{2a}{b}\right)-1\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}+2\sqrt{\frac{b}{2a}\cdot\frac{2a}{b}}\right)-1=\frac{5}{4}$.

当且仅当$\frac{b}{2a}=\frac{2a}{b}$,即$a=\frac{2}{3},b=\frac{4}{3}$时等号成立,故选B.

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. AD

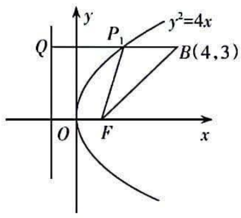
【解析】由结论知A正确;B错误;“二分法”用来解决函数的变号零点,所以C错误;由零点存在定理可得D正确,故选AD.

10. BD

【解析】抛物线的焦点为$F(1,0)$.

A. 如图,过点B作BQ垂直准线于点Q,交抛物线于点P_1,则$|P_1Q|=|P_1F|$.

则有$|PB|+|PF|\geqslant|P_1B|+|P_1Q|=|BQ|=5$,即$|PB|+|PF|$的最小值为5.故A错.



第10题答图

B. 点P到y轴的距离$d_1=|PF|-1$,设点P到直线l的距离为d_2,

所以$d_1+d_2=d_2+|PF|-1$.

易知$d_2+|PF|$的最小值为点F到直线l的距离,

故$d_2+|PF|$的最小值为$\frac{|2+3|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}$,

所以d_1+d_2的最小值为$\sqrt{5}-1$.故B正确.

C. 设$P\left(\frac{t^2}{4},t\right)$,则点$P$到直线$l$距离$d=\frac{\left|2\cdot\frac{t^2}{4}-t+3\right|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|(t-1)^2+5|}{2\sqrt{5}}$.因此当$t=1$时,$d$有最小值$\frac{\sqrt{5}}{2}$.故C错.

D. 由题得直线FB的方程为$y=x-1$,设直线FB与抛物线的交点$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

由$\begin{cases}y=x-1\\y^2=4x\end{cases}$得$x^2-6x+1=0$,所以$x_1+x_2=6$,$|MN|=x_1+x_2+p=6+2=8$.故D正确.

故选BD.

11. ABD

【解析】对于A，首先任选2天安排甲值班，共C_6^2=15种方法，再从剩下的4天中选2天安排乙值班，共C_4^2=6种方法，最后安排丙，C_2^2=1种方法，共计$15\times6\times1=90$种方法，故A正确；

对于B，甲可以值周一周二、周二周三、…、周五周六，共有5种方法，再从剩余4天中选2天安排乙，剩下两天安排丙，此步骤共$C_4^2\times C_2^2=6$种，共计$5\times6=30$种方法，故B正确；

对于C，首先确定甲在乙之前还是之后，有2种方法，再讨论丙值的两天班是否连续，若连续，则从"□甲甲□乙乙□"或"□乙乙□甲甲□"对应的三个空档中选择一个，安排"丙丙"即可，此时有C_3^1=3种方法，若不连续，则从"□甲甲□乙乙□"或"□乙乙□甲甲□"对应的三个空档中选择两个，各安排一个"丙"即可，此时有$C_3^2=3$种；

综上，符合题意的方法数为$2\times(3+3)=12$种，故C错误；

对于D，只需将"甲甲""乙乙""丙丙"做全排列即可，共A_3^3=6种方法，故D正确．

综上，故选ABD.

12. ACD

【解析】对于A，当$\omega=3$时，$f(x)=\cos(3x+\frac{\pi}{4})$，其零点满足$3x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故$x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

故$x\in\{\cdots,-\frac{3\pi}{12},\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12},\frac{9\pi}{12},\frac{13\pi}{12},\cdots\}$，其中在区间$[0,\pi]$内恰有3个，故A正确；

对于B，当$\omega=2$时，$f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{4})$，其极值点满足$2x+\frac{\pi}{4}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

故$x\in\{\cdots,-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{8},\frac{11\pi}{8},\cdots\}$，其中在区间$[0,\pi]$内只有2个，故B错误；

对于C，$f(x)$的最小值点满足$\omega x+\frac{\pi}{4}=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得$x=\frac{3\pi+8k\pi}{4\omega}(k\in\mathbf{Z})$，其中最小值为$\frac{3\pi}{4\omega}$，

令$\frac{3\pi}{4\omega}\leqslant\frac{2\pi}{3}$，得$\omega\geqslant\frac{9}{8}$，故C正确；

对于D，$f(x)$的极值点满足$\omega x+\frac{\pi}{4}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即$x=\frac{(4k-1)\pi}{4\omega}(k\in\mathbf{Z})$，

若$f(x)$在$[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$单调，需$\begin{cases}\frac{(4k-1)\pi}{4\omega}\leqslant\frac{\pi}{3},\\ \frac{(4k+3)\pi}{4\omega}\geqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}(k\in\mathbf{Z})\ (*)$，

由$\frac{3(4k-1)\pi}{4\omega}\leqslant\pi\leqslant\frac{2(4k+3)\pi}{4\omega}(k\in\mathbf{Z})$得$12k-3\leqslant8k+6(k\in\mathbf{Z})$，即$k\leqslant\frac{9}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

当$k=2$时，解$(*)$得$\frac{21}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{11}{2}$；当$k=1$时，解$(*)$得$\frac{9}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{7}{2}$；当$k=0$，解$(*)$得$-\frac{3}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{3}{2}$，

又$\omega>0$，故$0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$；当$k<0$时，对应的$\omega$均为负值，故D正确．

综上，故选ACD.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13. 10

【解析】由题意知，设笔试成绩$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，由70分及以上的人数为683+272+45=1000，得$P(X\geqslant70)\approx\frac{1000}{2000}=\frac{1}{2}=P(X\geqslant\mu)$，故$\mu$的值可估计为70，由参考数据知$P(X>\mu+2\sigma)=\frac{1-P(\mu-2\sigma\leqslant X<\mu+2\sigma)}{2}=0.02275$，而$P(X\geqslant90)\approx\frac{45}{2000}=0.0225\approx0.02275$，故$\mu+2\sigma$的值可估计为90，故$\sigma=\frac{(\mu+2\sigma)-\mu}{2}$约为$\frac{90-70}{2}=10$.

14. $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

【解析】$f'(x)=1+\ln x-2ax=x\left(\dfrac{1+\ln x}{x}-2a\right),(x>0)$,设$g(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}(x>0)$,则$g'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$,

所以当$x\in(0,1)$时,$g(x)$单调递增;当$x\in(1,+\infty)$时,$g(x)$单调递减.

$g(x)_{\max}=g(1)=1$,所以$f(x)$在定义区间内恒单调递减,则$1-2a\leqslant 0$,即$a\geqslant\dfrac{1}{2}$.

15. 365

【解析】因为$a_n=\log_3(1\cdot x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_m\cdot 3)$,所以$a_{n+1}=\log_3[1\cdot(1\cdot x_1)\cdot x_1\cdot(x_1\cdot x_2)\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_m\cdot(x_m\cdot 3)\cdot 3]$

$=\log_3\dfrac{1^3\cdot x_1^3\cdot x_2^3\cdot\cdots\cdot x_m^3\cdot 3^3}{3}=3a_n-1$. 设$a_{n+1}+p=3(a_n+p)$,即$a_{n+1}=3a_n+2p$,可得$p=-\dfrac{1}{2}$,

又知$a_1=\log_3(1\times3\times3)=2$,则数列$\{a_n-\dfrac{1}{2}\}$是首项为$2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$,公比为3的等比数列,故$a_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\times3^{n-1}$,

所以$a_n=\dfrac{3^n+1}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$,所以$a_6=365$.

16. 4π

【解析】取BC的中点N,DE的中点M,

连接PN,MN,则$BC\perp MN$,

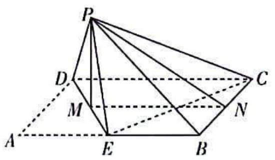
因为$PB=PC$,所以$BC\perp PN$,

因为$MN\cap PN=N$,MN,$PN\subset$平面PMN,所以$BC\perp$平面PMN,

因为$PM\subset$平面PMN,所以$BC\perp PM$,

因为$PD=PE$,所以$PM\perp DE$,

又BC,$DE\subset$平面$BCDE$,且BC与DE是相交的,



第16题答图

所以$PM\perp$平面$BCDE$,又$EC\subset$平面$BCDE$,所以$PM\perp EC$,又因为$DE\perp EC$,所以$EC\perp$平面PDE.

三棱锥$P-DEC$的外接球与长、宽、高分别为$1,1,\sqrt{2}$的长方体的外接球半径相同,故$R=1$,所以球的表面积为4π.

四、解答题:本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解:(1)由题设可得$3S_n=a_n(n+3)-1(n\in\mathbf{N}^*)$, ………… 1分

当$n=1$时,$3a_1=4a_1-1$,得$a_1=1$, ………… 2分

当$n\geqslant2$时,$3S_{n-1}=a_{n-1}(n+2)+1$,两式相减得$3a_n=(n+3)a_n-(n+2)a_{n-1}$,

所以$na_n=(n+2)a_{n-1}$,即$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+2}{n}$, ………… 4分

所以$\dfrac{a_2}{a_1}\times\dfrac{a_3}{a_2}\times\dfrac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{4}{2}\times\dfrac{5}{3}\times\dfrac{6}{4}\times\cdots\times\dfrac{n+1}{n-1}\times\dfrac{n+2}{n}$,

所以数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=\dfrac{1}{6}(n+1)(n+2)$. ………… 6分

(2)因为$c_n=\dfrac{1}{3a_nb_n}=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}-\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$, ………… 8分

所以数列$\{c_n\}$的前n项和$T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{n-1}+c_n$

$=\left(\dfrac{1}{2\times3}-\dfrac{1}{3\times4}\right)+\left(\dfrac{1}{3\times4}-\dfrac{1}{4\times5}\right)+\left(\dfrac{1}{4\times5}-\dfrac{1}{5\times6}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n\times(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)\times(n+2)}\right)+$

$\left(\dfrac{1}{(n+1)\times(n+2)}-\dfrac{1}{(n+2)\times(n+3)}\right)=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}=\dfrac{n^2+5n}{6(n+2)(n+3)}$. ………… 10分

18. 解：(1)若选择①，由 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2}{3}$，代入 $c=9$，整理得 $a^2=b^2-12b+81$，…… 2分

代入 $a=b-1$，解得 $a=7,b=8$，…… 4分

故 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times8\times9\times\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}=12\sqrt{5}$； …… 6分

若选择②，由 $\begin{cases}\cos A=\frac{2}{3},\\ \cos B=\frac{11}{21},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sin A=\frac{\sqrt{5}}{3},\\ \sin B=\frac{8\sqrt{5}}{21},\end{cases}$ 故 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{3\sqrt{5}}{7}$，

由正弦定理知 $\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\frac{8\sqrt{5}}{21}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{8}{7}$，而 $b-a=1$，故 $a=7,b=8$，…… 2分

$c=\frac{a}{\sin A}\cdot\sin C=\frac{7}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{7}=9$，…… 4分

于是 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times8\times9\times\frac{\sqrt{5}}{3}=12\sqrt{5}$； …… 6分

(2)设 $\angle DBA=\angle DBC=\theta$，则 $\angle ABC=2\theta$，由(1)知 $\cos2\theta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{11}{21}=2\cos^2\theta-1$，解得 $\cos\theta=\frac{4\sqrt{21}}{21}$，

…… 8分

设 $BD=x$，由 $S_{\triangle BAC}=S_{\triangle BDA}+S_{\triangle BDC}$，得 $\frac{1}{2}ac\sin2\theta=\frac{1}{2}ax\sin\theta+\frac{1}{2}cx\sin\theta$， …… 10分

故 $x=\frac{ac\sin2\theta}{(a+c)\sin\theta}=\frac{2ac\cos\theta}{a+c}=\frac{2\times7\times9\times\frac{4\sqrt{21}}{21}}{7+9}=\frac{3\sqrt{21}}{2}$，即 $BD=\frac{3\sqrt{21}}{2}$. …… 12分

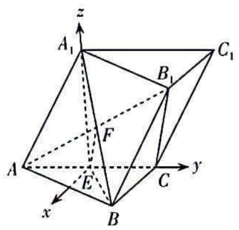
19. (1)证明：连接 AB_1，交 A_1B 于点 F，连接 EF.

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 ABB_1A_1 为平行四边形，F 为 AB_1 的中点，

又 $\because E$ 是 AC 的中点，$\therefore EF\parallel B_1C$，…… 2分

又 $\because EF\subset$ 平面 A_1EB，$B_1C\not\subset$ 平面 A_1EB，

$\therefore B_1C\parallel$ 平面 A_1EB. …… 4分



第19题答图

(2)因为 $A_1A=AC$，$\angle A_1AC=60°$，E 是 AC 的中点，

所以 $A_1E\perp AC$.

又平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 ABC，

$A_1E\subset$ 平面 A_1ACC_1，

平面 $A_1ACC_1\cap$ 平面 $ABC=AC$，

所以 $A_1E\perp$ 平面 ABC， …… 6分

如图，以 E 为原点，分别以射线 EC，EA_1 为 y，z 轴的正半轴，以垂直于 EC 的射线为 x 轴建立空间直角坐标系 $E-xyz$.

设 $AC=4$，则 $A_1(0,0,2\sqrt{3})$，$E(0,0,0)$，$A(0,-2,0)$，$B(\sqrt{3},1,0)$，$C(0,2,0)$.

所以 $\overrightarrow{EA_1}=(0,0,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EB}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AA_1}=(0,2,2\sqrt{3})$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 A_1EB 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EA_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2\sqrt{3}z=0,\\ \sqrt{3}x+y=0,\end{cases}$

所以可取 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},0)$. ………………………………………………………………………………… 8分

设 $\boldsymbol{m}$ 是平面 B_1BC 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\end{cases}$

同理可取 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},-1)$. ……………………………………………………………………… 10分

则 $\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

又两平面所成角为锐角，

故平面 A_1EB 与平面 B_1BC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………………………………… 12分

20. 解：(1)由题意知，每次取到黄球的概率为 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，故 $X\sim B(3,\dfrac{1}{3})$，

$P(X=k)=C_3^k\times(\dfrac{1}{3})^k(\dfrac{2}{3})^{3-k}(k=0,1,2,3)$，代入 $k=1$ 得 $P(X=1)=\dfrac{12}{27}=\dfrac{4}{9}$，……………………… 2分

同理可得 $P(X=0)=\dfrac{8}{27}$，$P(X=2)=\dfrac{6}{27}$，$P(X=3)=\dfrac{1}{27}$，

故 $E(X)=0\times\dfrac{8}{27}+1\times\dfrac{12}{27}+2\times\dfrac{6}{27}+3\times\dfrac{1}{27}=1$； ……………………………………………… 4分

(2)由题意可知 Y 服从超几何分布，$P(Y=k)=\dfrac{C_2^kC_4^{3-k}}{C_6^3}(k=0,1,2)$，

代入 $k=1$ 得 $P(Y=1)=\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$，……………………………………………………………………… 6分

同理可得 $P(Y=0)=\dfrac{1}{5}$，$P(Y=2)=\dfrac{1}{5}$，故 $E(Y)=0\times\dfrac{1}{5}+1\times\dfrac{3}{5}+2\times\dfrac{1}{5}=1$； ……………………………… 8分

(3)由(1)(2)知，$P(|X-Y|\leqslant 1)=1-P(|X-Y|\geqslant 2)$

$=1-P(X=0,Y=2)-P(X=2,Y=0)-P(X=3,Y=0)-P(X=3,Y=1)$ ……………………………… 10分

$=1-\dfrac{8}{27}\times\dfrac{1}{5}-\dfrac{6}{27}\times\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{27}\times\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{27}\times\dfrac{3}{5}=1-\dfrac{2}{15}=\dfrac{13}{15}$. ………………………………………… 12分

21. 解：(1)由题意得 $b=1$，所以椭圆方程：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$， …………………………………………………… 1分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

将 $y=2x-2$ 代入 $x^2+4y^2=4$ 得：$17x^2-32x+12=0$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{32}{17}$，$x_1x_2=\dfrac{12}{17}$，…………………………………………………………………………………… 3分

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(2x_1-2)(2x_2-2)=5x_1x_2-4(x_1+x_2)+4$

$=5\times\dfrac{12}{17}-4\times\dfrac{32}{17}+4=0$，

所以 $OM\perp ON$. …… 5分

(2)设 $P(4,y_0)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，而 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，

设 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{PD}=\mu\overrightarrow{DB}$，

则 $(x_3-4,y_3-y_0)=\lambda(-2-x_3,-y_3)$，

$(x_4-4,y_4-y_0)=\mu(2-x_4,-y_4)$，……………………………………………………………………………… 7分

所以 $(1+\lambda)x_3=4-2\lambda$，$(1+\lambda)y_3=y_0$，$(1+\mu)x_4=4+2\mu$，$(1+\mu)y_4=y_0$，…………………………… 8分

因为 $C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$ 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上，

所以 $\dfrac{x_3^2}{4}+\dfrac{y_3^2}{b^2}=1$，$\dfrac{x_4^2}{4}+\dfrac{y_4^2}{b^2}=1$，

所以$\frac{(1+\lambda)^2x_3^2}{4}+\frac{(1+\lambda)^2y_3^2}{b^2}=(1+\lambda)^2$，$\frac{(1+\mu)^2x_4^2}{4}+\frac{(1+\mu)^2y_4^2}{b^2}=(1+\mu)^2$. ………………………… 9分

代入作差可得：$\frac{(4-2\lambda)^2-(4+2\mu)^2}{4}=(1+\lambda)^2-(1+\mu)^2$. ………………………… 10分

化简得：$\mu=-3\lambda$， ………………………… 11分

所以$\frac{|CA|\cdot|PD|}{|PC|\cdot|BD|}$定值为3. ………………………… 12分

22. 解：(1)$f'(x)=2m(x-1)-2+\frac{2}{x}=\frac{2mx^2-(2m+2)x+2}{x}(x>0)$，

令$h(x)=2mx^2-(2m+2)x+2$，

因为$m\geqslant2$，二次函数对称轴$x=\frac{2m+2}{4m}=\frac{m+1}{2m}$，$h(0)=2>0$且$\Delta=(2m-2)^2>0$恒成立， ………………………… 1分

所以$h(x)=0$恒有两不相等正实根，且这两正实根分别为$a,b(b>a)$，$a+b=\frac{m+1}{m}$，$ab=\frac{1}{m}$， ………………………… 2分

所以$f(x)$的单调递减区间是(a,b)，

所以单调递减区间(a,b)的长度$b-a=\sqrt{(b+a)^2-4ab}=\sqrt{1-\frac{2}{m}+\frac{1}{m^2}}=\left|1-\frac{1}{m}\right|$， ………………………… 3分

因为$m\geqslant2$，所以$b-a$的取值范围为$\left[\frac{1}{2},1\right)$. ………………………… 4分

(2)由题意$m(x-1)^2-2x+2\ln x\leqslant2xe^{x-1}-4x$在$[1,+\infty)$上恒成立，

即$m(x-1)^2+2x+2\ln x-2xe^{x-1}\leqslant0$恒成立，

令$F(x)=m(x-1)^2+2x+2\ln x-2xe^{x-1}$，

则$F'(x)=2m(x-1)+2+\frac{2}{x}-(2x+2)e^{x-1}$，令$G(x)=2m(x-1)+2+\frac{2}{x}-(2x+2)e^{x-1}$， ………………………… 5分

则$G'(x)=2m-\frac{2}{x^2}-(2x+4)e^{x-1}$，令$H(x)=2m-\frac{2}{x^2}-(2x+4)e^{x-1}$，

则$H'(x)=\frac{4}{x^3}-(2x+6)e^{x-1}$，令$M(x)=\frac{4}{x^3}-(2x+6)e^{x-1}$，

则$M'(x)=-\frac{12}{x^4}-(2x+8)e^{x-1}$，当$x\geqslant1$时，$M'(x)<0$，

所以$M(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减，$M(x)\leqslant M(1)=4-8=-4<0$，

所以$H(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减，$H(x)\leqslant H(1)=2m-2-6=2m-8$，

当$2m-8\leqslant0$，即$m\leqslant4$时，$G'(x)=H(x)\leqslant0$， ………………………… 7分

$G(x)=F'(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减，$F'(x)\leqslant F'(1)=0$，

所以$F(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减，$F(x)\leqslant F(1)=0$成立，所以$2\leqslant m\leqslant4$， ………………………… 8分

当$2m-8>0$，即$m>4$，单调递减函数$H(x)$在$x\to+\infty$时，$H(x)\to-\infty$，

所以$H(x)=0$在$[1,+\infty)$上有根，记为x_0，

在$[1,x_0)$上，$H(x)>0$，在$(x_0,+\infty)$上$H(x)<0$，

所以$F'(x)$在$[1,x_0)$上单调递增，在$(x_0,+\infty)$上单调递减， ………………………… 10分

且$F'(1)=0$，函数$F'(x)$在$x\to+\infty$时，$F'(x)\to-\infty$，

因此$F'(x)=0$在$(1,+\infty)$上有解，记为x_1，

在$(1,x_1)$上，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增，而$F(1)=0$，

因此在$(1,x_1)$上，$F(x)>F(1)=0$，从而在$[1,+\infty)$上$F(x)\leqslant0$不恒成立，

综上所述，$2\leqslant m\leqslant4$. ………………………… 12分