



高三数学考试

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $z + \bar{z} = 4$, $i(z - \bar{z}) = -2$, 则 $z =$

- A. $-2+i$ B. $2+i$ C. $2-i$ D. $-2-i$

2. 定义差集 $M - N = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin N\}$. 已知集合 $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{3, 5, 8\}$, 则 $A - (A \cap B) =$

- A. $\emptyset$ B. $\{2\}$ C. $\{8\}$ D. $\{3, 5\}$

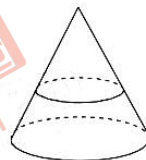
3. “ $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ”是“ $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知某种装水的瓶内芯近似为底面半径是 4 dm、高是 8 dm 的圆锥,当瓶内装满水并喝完一半,且瓶正立放置时(如图所示),水的高度约为

(参考数据: $\sqrt[3]{3} \approx 1.44$, $\sqrt[3]{4} \approx 1.59$)

- A. 1.62 dm B. 1.64 dm
C. 3.18 dm D. 3.46 dm



5. 若函数 $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x^a$ 在 $(0, 8)$ 内有 2 个零点,则 a 的取值范围为

- A. $(-\infty, 2\ln 2)$ B. $(-\infty, 0) \cup (0, 2\ln 2)$
C. $(-\infty, 3\ln 2)$ D. $(-\infty, 0) \cup (0, 3\ln 2)$

6. $(x + \frac{2}{x} - y)^7$ 展开式中 $x^2 y^5$ 的系数为

- A. -21 B. 21 C. -35 D. 35

7. 若 $2 < m < 8$, 椭圆 $C: \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{2} = 1$ 与椭圆 $D: \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{8} = 1$ 的离心率分别为 e_1, e_2 , 则

- A. $e_1 \cdot e_2$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $e_1 \cdot e_2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$
C. $e_1 \cdot e_2$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $e_1 \cdot e_2$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$

8. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长是 4, 侧棱长是 6, M, N 分别为 BB_1, CC_1 的中点, 若 P 是三棱柱内(含棱柱的表面)的动点, $MP \parallel$ 平面 AB_1N , 则动点 P 的轨迹面积为

- A. $5\sqrt{3}$ B. 5 C. $\sqrt{39}$ D. $\sqrt{26}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列函数满足 $f(2^{0.1}) = f(2^{-0.1})$ 的是

- A. $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ B. $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$
C. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ D. $f(x) = |\lg x|$

10. 已知圆 $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$, 则

- A. 圆 C 与圆 $D: x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 相交
B. 直线 $2x + y + m^2 = 0$ 与圆 C 可能相切
C. 直线 $(1+2m)x + (1-m)y - 3 = 0$ 与圆 C 必相交
D. 直线 $4x + 3y - 2 = 0, 3x + 4y - 1 = 0$ 各自被圆 C 所截得的弦长恰好相等

11. 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 再将所得图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{\omega} (\omega > 1)$, 得到函数 $g(x)$ 的图象. 若 $g(x)$ 在 $[0, \pi)$ 内恰有 5 个极值点, 则 ω 的取值可能是

- A. $\frac{29}{12}$ B. $\frac{35}{12}$ C. $\frac{17}{6}$ D. $\frac{11}{4}$

12. 若 $a = \frac{1}{11}, b = \sin \frac{1}{10}, c = \ln \frac{11}{10}, d = \tan \frac{1}{11}$, 则

- A. $d > a$ B. $c > a$ C. $a > b$ D. $b > c$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $\overrightarrow{AB} = (3, 2m-4), \overrightarrow{BC} = (2, 4)$, 若 A, B, C 三点共线, 则 $m =$ $\blacktriangle$.

14. 若函数 $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + 3ax$ 的导函数 $f'(x)$ 为偶函数, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $\blacktriangle$.

15. 已知 $|F_1F_2| = 10$, 点 P 满足 $|PF_2| - |PF_1| = 6$, 动点 M, N 满足 $|MN| = 2, \overrightarrow{MF_1} = \overrightarrow{F_1N}$, 则 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的最小值是 $\blacktriangle$.

16. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_n = \frac{3}{2}a_n - 3^{n+1}$, 则 $a_n =$ $\blacktriangle$; 若不等式 $a_n \geq \frac{2n^2+n}{k^2}$ 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 恒成立, 则正数 k 的最小值为 $\blacktriangle$. (本题第一空 3 分, 第二空 2 分)

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在① $b=4, c=6$, ② $b=3, c=2\sqrt{2}$, ③ $b=7, c=5$ 这三个条件中选一个合适的补充在下面的横线上,使得问题可以解答,并写出完整的解答过程.

问题:在钝角 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a=5$,

(1)求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2)求 $\triangle ABC$ 外接圆的半径与内切圆的半径.

18. (12 分)

已知在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1+a_2=4$,且 a_1, a_2+2, a_3 成等差数列,数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n>0, b_1=1, b_{n+1}^2-b_n^2=2(b_{n+1}+b_n)$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

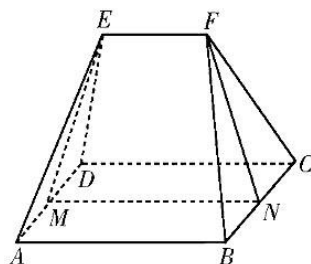
(2)设 $c_n=2^{b_n}-a_n$,求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

故宫太和殿是中国形制最高的宫殿,其建筑采用了重檐庑殿顶的的屋顶样式,庑殿顶是“四出水”的五脊四坡式,由一条正脊和四条垂脊组成,因此又称五脊殿.由于屋顶有四面斜坡,故又称四阿顶.如图,某几何体 $ABCDEF$ 有五个面,其形状与四阿顶相类似.已知底面 $ABCD$ 为矩形, $AB=2AD=2EF=8$, $EF\parallel$ 底面 $ABCD$,且 $EA=ED=FB=FC$, M, N 分别为 AD, BC 的中点.

(1)证明: $EF\parallel AB$ 且 $BC\perp$ 平面 $EFNM$.

(2)若二面角 $E-AD-B$ 为 $\frac{\pi}{4}$,求 CF 与平面 ABF 所成角的正弦值.



20. (12 分)

某学校在 50 年校庆到来之际,举行了一次趣味运动项目比赛,比赛由传统运动项目和新增运动项目组成,每位参赛运动员共需要完成 3 个运动项目.对于每一个传统运动项目,若没有完成,得 0 分,若完成了,得 30 分.对于新增运动项目,若没有完成,得 0 分,若只完成了 1 个,得 40 分,若完成了 2 个,得 90 分.最后得分越多者,获得的奖金越多.现有两种参赛的方案供运动员选择.方案一:只参加 3 个传统运动项目.方案二:先参加 1 个传统运动项目,再参加 2 个新增运动项目.已知甲、乙两位运动员能完成每个传统运动项目的概率均为 $\frac{1}{2}$,能完成每个新增运动项目的概率均为 $\frac{1}{3}$,且甲、乙参加的每个运动项目是否能完成相互独立.

(1)若运动员甲选择方案一,求甲得分不低于 60 分的概率.

(2)若以最后得分的数学期望为依据,请问运动员乙应该选择方案一还是方案二?说明你的理由.

21. (12 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$,过点 $Q(1, 3)$ 作直线与 C 交于 M, N 两点,当该直线垂直于 x 轴时, $\triangle OMN$ 的面积为 2,其中 O 为坐标原点.

(1)求 C 的方程.

(2)若 C 的一条弦 ST 经过 C 的焦点,且直线 ST 与直线 MN 平行,试问是否存在常数 Ω ,使得 $|QM| \cdot |QN| = \Omega |ST|$ 恒成立?若存在,求 Ω 的值;若不存在,请说明理由.

22. (12 分)

设 $g'(x)$ 为 $g(x)$ 的导函数,若 $g'(x)$ 是定义域为 D 的增函数,则称 $g(x)$ 为 D 上的“凹函数”,已知函数 $f(x) = xe^x + ax^2 + a$ 为 $\mathbf{R}$ 上的凹函数.

(1)求 a 的取值范围;

(2)设函数 $h(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$,证明:当 $x > 0$ 时, $h(x) > 0$,当 $x < 0$ 时, $h(x) < 0$.

(3)证明: $f(x) > \frac{1}{2}x^3 + \frac{45}{44}x^2 + x + \frac{1}{44}$.

高三数学考试参考答案

1. B 【解析】本题考查共轭复数及复数的运算,考查数学运算的核心素养.

设复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$, 则 $\bar{z}=a-bi$, $z+\bar{z}=2a$, 得 $a=2$, $z-\bar{z}=2bi$,
 $i(z-\bar{z})=-2b$, 得 $b=1$, 故 $z=2+i$.

2. B 【解析】本题考查集合的新概念与集合的运算,考查数学抽象与数学运算的核心素养.

因为 $A\cap B=\{3,5\}$, 所以 $A-(A\cap B)=\{2\}$.

3. A 【解析】本题考查充分必要条件的判定与三角恒等变换,考查逻辑推理的核心素养.

若 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, 则 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$. 若 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$, 则 $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$ 或 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$. 故“ $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ ”是“ $\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$ ”的充分不必要条件.

4. B 【解析】本题考查圆锥的体积,考查空间想象能力与数据处理能力.

因为瓶内装满水并喝完一半, 所以当装水的瓶正立放置时, 圆锥上半部分的体积占圆锥体积的一半. 设上半部分小圆锥的底面半径为 r dm, 易得小圆锥的高为 $2r$ dm, 则 $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2r = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 8$, 解得 $r^3=32$, 即 $r=2\sqrt[3]{4}\approx 3.18$, $2r\approx 6.36$, 则剩余的水的高度为 $8-2r\approx 1.64$ dm.

5. D 【解析】本题考查函数的零点与对数函数,考查数学运算的核心素养.

由 $f(x)=(\ln x)^2-a\ln x=\ln x(\ln x-a)$, 得 $x=1$ 或 $x=e^a$. 依题意可得 $0<e^a<8$, 且 $e^a\neq 1$, 所以 $a<3\ln 2$, 且 $a\neq 0$.

6. A 【解析】本题考查二项式定理,考查数学运算的核心素养.

因为 $(x+\frac{2}{x}-y)^7=[(x+\frac{2}{x})-y]^7$ 展开式的通项公式为 $C_7^k(x+\frac{2}{x})^{7-k}(-y)^k$, 所以当 $k=5$ 时, 含有 x^2y^5 的项, 此时 $C_7^5(x+\frac{2}{x})^2(-y)^5=-21(x^2+4+\frac{4}{x^2})y^5$, 故 x^2y^5 的系数为 -21 .

7. D 【解析】本题考查椭圆的离心率与基本不等式的应用,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

因为 $2<m<8$, 所以 $e_1=\sqrt{1-\frac{2}{m}}$, $e_2=\sqrt{1-\frac{m}{8}}$,

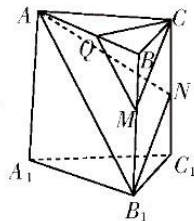
所以 $e_1 \cdot e_2 = \sqrt{(1-\frac{2}{m})(1-\frac{m}{8})} = \sqrt{1+\frac{1}{4}-(\frac{2}{m}+\frac{m}{8})} \leq \sqrt{\frac{5}{4}-2\sqrt{\frac{2}{m} \cdot \frac{m}{8}}} = \frac{1}{2}$,

当且仅当 $m=4$ 时, 等号成立, 故 $e_1 \cdot e_2$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$, $e_1 \cdot e_2$ 无最小值.

8. C 【解析】本题考查空间点、线、面的位置关系,考查直观想象与数学运算的核心素养.

取 AB 的中点 Q , 连接 MQ, CQ, MC , 由 M, N, Q 分别为 BB_1, CC_1, AB 的中点可得 $MC \parallel B_1N, MQ \parallel AB_1, MC \cap MQ = M$, 则平面 $MQC \parallel$ 平面 AB_1N , 所以动点 P 的轨迹为 $\triangle MQC$ 及其内部(挖去点 M).

在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 为等边三角形, Q 为 AB 的中点, 则 $CQ \perp AB$, 易得 $CQ \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $CQ \perp QM$. 因为 $AB=4$, 所以 $CQ=2\sqrt{3}$, 因为侧棱长是 6, 所以 $AB_1=2\sqrt{13}$, 所以 $MQ=\sqrt{13}$, 则 $\triangle MQC$ 的面积 $S=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{13} = \sqrt{39}$, 故动点 P 的轨迹面积为 $\sqrt{39}$.



9. BD 【解析】本题考查函数的解析式与基本初等函数,考查数学抽象与数学运算的核心素养.

$2^{-0.1} = \frac{1}{2^{0.1}}$, 则当 $f(\frac{1}{x}) = f(x)$ 时, 必有 $f(2^{0.1}) = f(2^{-0.1})$. 若 $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$, 则 $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$, 则 A 错误.

若 $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$, 则 $f(\frac{1}{x}) = \frac{2}{x} + 2x = f(x)$, 则 B 正确.

若 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, 则 $f(\frac{1}{x}) = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{1-x}{1+x} = -f(x)$, 则 C 错误.

若 $f(x) = |\lg x|$, 则 $f(\frac{1}{x}) = |\lg \frac{1}{x}| = |-\lg x| = f(x)$, 则 D 正确.

10. ACD 【解析】本题考查直线与圆的综合, 考查直观想象与数学运算的核心素养.

对于 A, 因为 $|CD| = \sqrt{5} \in (2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2})$, 所以圆 C 与圆 D: $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 相交, A 正确.

对于 B, 点 C 到直线 $2x + y + m^2 = 0$ 的距离 $d = \frac{5+m^2}{\sqrt{5}} \geq \sqrt{5} > 2$, 则直线 $2x + y + m^2 = 0$ 与圆 C 相离, B 错误.

对于 C, 由 $(1+2m)x + (1-m)y - 3 = 0$, 得 $x + y - 3 + m(2x - y) = 0$, 令 $2x - y = 0$, 得 $x + y - 3 = 0$, 解得 $x = 1, y = 2$, 所以直线 l 过定点 $P(1, 2)$, 易知 $P(1, 2)$ 在圆 C 的内部, 所以直线 $(1+2m)x + (1-m)y - 3 = 0$ 与圆 C 必相交, C 正确.

对于 D, 因为 $\frac{|4 \times 2 + 3 \times 1 - 2|}{5} = \frac{|3 \times 2 + 4 \times 1 - 1|}{5} < 2$, 所以点 C 到这两条直线的距离相等, 且这两条直线与圆 C 相交, 所以直线 $4x + 3y - 2 = 0, 3x + 4y - 1 = 0$ 各自被圆 C 所截得的弦长恰好相等, D 正确.

11. BCD 【解析】本题考查三角函数的图象及其性质, 考查直观想象、数学运算及逻辑推理的核心素养.

将 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 得到 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象, 则 $g(x) = \sin(2\omega x - \frac{\pi}{3})$.

设 $\theta = 2\omega x - \frac{\pi}{3}$, 由 $x \in [0, \pi)$, 得 $\theta \in [-\frac{\pi}{3}, 2\pi\omega - \frac{\pi}{3})$, 因为 $g(x)$ 在 $[0, \pi)$ 内恰有 5 个极值点, 所以 $\frac{9\pi}{2} < 2\pi\omega - \frac{\pi}{3} \leq \frac{11\pi}{2}$, 解得 $\frac{29}{12} < \omega \leq \frac{35}{12}$.

12. ABD 【解析】本题考查构造函数比较大小的策略, 考查数学抽象与逻辑推理的核心素养.

令 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1} (x \geq 0)$, 则 $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2} \geq 0$, 故 $f(x)$ 为增函数,

由 $f(\frac{1}{10}) = \ln \frac{11}{10} - \frac{1}{11} > f(0) = 0$, 得 $c > a$. 令 $g(x) = \ln(x+1) - \sin x (0 < x \leq \frac{1}{10})$,

则 $g'(x) = \frac{1}{x+1} - \cos x$, 当 $0 < x \leq \frac{1}{10}$ 时, $-1 < -\frac{1}{(x+1)^2} < -\frac{1}{1.21} < -\frac{1}{2}, 0 < \sin x < \frac{1}{2}$,

则 $g'(x)$ 的导函数 $g''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \sin x < 0$, 则 $g'(x)$ 在 $(0, \frac{1}{10}]$ 上单调递减,

则 $g'(x) < g'(0) = 0$, 得 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{10}]$ 上单调递减,

所以 $g(\frac{1}{10}) = \ln \frac{11}{10} - \sin \frac{1}{10} < g(0) = 0$, 得 $b > c$. 故 $b > c > a$.

根据三角函数的定义可证 $\alpha < \tan \alpha (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$, 故 $\tan \frac{1}{11} > \frac{1}{11}$, 即 $d > a$.

13. 5 【解析】本题考查平面向量的共线, 考查数学运算的核心素养.

由 A, B, C 三点共线知 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$, 则 $3 \times 4 = (2m-4) \times 2$, 解得 $m = 5$.

14. $y = 6x - 2$ (或 $6x - y - 2 = 0$) 【解析】本题考查导数的几何意义与函数的奇偶性, 考查数学运算的核心素养.

因为 $f'(x) = 3x^2 + 2(a-1)x + 3a$ 为偶函数, 所以 $2(a-1) = 0$, 解得 $a = 1$, 则 $f'(1) = 6$.

又 $f(1) = 4$, 故曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 4 = 6(x - 1)$, 即 $y = 6x - 2$.

- 15.3 【解析】本题考查双曲线的定义与向量的数量积,考查数形结合、化归与转化的数学思想.

以 F_1F_2 的中点 O 为坐标原点, F_1F_2 的中垂线为 y 轴, 建立如图所示的直角坐标系, 则 $F_1(-5,0)$, 由双曲线定义可知, 点 P 的轨迹是以 F_1, F_2 为焦点,

实轴长为 6 的双曲线的左支, 即点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 (x \leq -3)$.

$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = (\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{F_1M}) \cdot (\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{F_1N})$, 由 $\overrightarrow{MF_1} = \overrightarrow{F_1N}$ 可得 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = (\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{F_1M}) \cdot (\overrightarrow{PF_1} - \overrightarrow{F_1M}) = |\overrightarrow{PF_1}|^2 - |\overrightarrow{F_1M}|^2 = |\overrightarrow{PF_1}|^2 - 1$.

因为 $|\overrightarrow{PF_1}|$ 的最小值为 $c-a=5-3=2$, 所以 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的最小值是 3.

16. $(4n+2) \times 3^n; \frac{\sqrt{6}}{6}$ 【解析】本题考查数列的综合, 考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

当 $n=1$ 时, $S_1 = \frac{3}{2}a_1 - 3^2$, 得 $a_1 = 18$. 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = \frac{3}{2}a_{n-1} - 3^n$, $S_n = \frac{3}{2}a_n - 3^{n+1}$,

两式相减得 $a_n = \frac{3}{2}a_n - \frac{3}{2}a_{n-1} - 2 \times 3^n$, 得 $a_n = 3a_{n-1} + 4 \times 3^n$, 所以 $\frac{a_n}{3^n} - \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} = 4$.

又因为 $\frac{a_1}{3^1} = 6$, 所以 $\{\frac{a_n}{3^n}\}$ 是以 6 为首项, 4 为公差的等差数列,

所以 $\frac{a_n}{3^n} = 4n+2$, 即 $a_n = (4n+2) \times 3^n$.

因为 $a_n \geq \frac{2n^2+n}{k^2}$, 所以 $(4n+2) \times 3^n \geq \frac{2n^2+n}{k^2}$, 即 $\frac{2 \times 3^n}{n} \geq \frac{1}{k^2}$.

记 $b_n = \frac{2 \times 3^n}{n}$, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3n}{n+1} > 1$, 所以 $\{b_n\}$ 为递增数列, $b_n \geq b_1 = 6$.

所以 $\frac{1}{k^2} \leq 6$, 解得 $|k| \geq \frac{\sqrt{6}}{6}$, 则正数 k 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

17. 选②. 1 分

解: (1) 因为 $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{-8}{12\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, 3 分

所以 $\sin A = \frac{\sqrt{7}}{3}$, 4 分

故 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{14}$ 5 分

(2) 设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R , 由正弦定理得 $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{15\sqrt{7}}{7}$, 7 分

所以 $R = \frac{15\sqrt{7}}{14}$ 8 分

设 $\triangle ABC$ 内切圆的半径为 r , 由 $\frac{1}{2}r(a+b+c) = S$, 9 分

得 $r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2\sqrt{14}}{8+2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{14}-\sqrt{7}}{7}$ 10 分

评分细则:

【1】条件①和③都不满足 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 如果考生选①或③, 直接判 0 分.

【2】本题还可以求 $\cos B = \frac{3\sqrt{2}}{5}$, $\sin B = \frac{\sqrt{7}}{5}$, $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ac \sin B = \sqrt{14}$,

$2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{15\sqrt{7}}{7}$, 后面同参考答案, 本题详细赋分情况同参考答案.

【3】本题还可以求 $\cos C = \frac{13}{15}$, $\sin C = \frac{2\sqrt{14}}{15}$, $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \sqrt{14}$, $2R = \frac{c}{\sin C} = \frac{15\sqrt{7}}{7}$, 后面同参考答案, 本题详细赋分情况同参考答案.

18. 解: (1) 因为 a_1, a_2+2, a_3 成等差数列, 所以 $a_1+a_3=2(a_2+2)$, 1 分
 又因为 $a_1+a_2=4$, 所以 $a_3=3a_2$, 得 $\{a_n\}$ 的公比 $q=3$, 2 分
 所以 $a_1+3a_1=4$, 解得 $a_1=1$, 3 分
 故 $a_n=3^{n-1}$ 4 分
 (2) 由 $b_n>0, b_{n+1}^2-b_n^2=2(b_{n+1}+b_n)$, 得 $b_{n+1}-b_n=2$, 5 分
 则 $\{b_n\}$ 是等差数列, 因为 $b_1=1$, 所以 $b_n=2n-1$, 7 分
 则 $c_n=2^{b_n}-a_n=2^{2n-1}-3^{n-1}$,
 则 $T_n=(2^1-3^0)+(2^3-3^1)+(2^5-3^2)+\dots+(2^{2n-1}-3^{n-1})$ 8 分
 $= (2^1+2^3+2^5+\dots+2^{2n-1}) - (3^0+3^1+3^2+\dots+3^{n-1})$ 9 分
 $= \frac{2(1-4^n)}{1-4} - \frac{1-3^n}{1-3}$ 11 分
 $= \frac{4^{n+1}-3^{n+1}-1}{6}$ 12 分

评分细则:

【1】第(1)问求出 $a_1=1$ 给 1 分, 求出 $q=3$ 给 1 分.

【2】第(2)问求 T_n 时, 只要得到 $\frac{2(1-4^n)}{1-4} - \frac{1-3^n}{1-3}$ 就可以给 3 分, 最后化简错误扣 1 分.

19. (1) 证明: 因为 $EF \parallel$ 底面 $ABCD$, $EF \subset$ 平面 $ABFE$, 平面 $ABFE \cap$ 底面 $ABCD = AB$,
 所以 $EF \parallel AB$ 1 分
 因为 $EA=ED=FB=FC$, M, N 分别为 AD, BC 的中点, 所以 $EM \perp AD, FN \perp BC$ 2 分
 因为 $MN=AB \neq EF$, 且 $EF \parallel AB$, 所以四边形 $EFNM$ 为梯形, 且 EM 与 FN 必相交于一点, 3 分
 又 $AD \parallel BC$, 所以 $EM \perp BC$, 故 $BC \perp$ 平面 $EFNM$ 4 分
 (2) 解: 过点 E 作 $EH \perp MN$, 垂足为 H , 由(1)可证 $EH \perp$ 平面 $ABCD$ 5 分
 由 $EM \perp AD, MH \perp AD$, 得 $\angle EMH$ 为二面角 $E-AD-B$ 的平面角, 则 $\angle EMH = \frac{\pi}{4}$ 6 分

因为 $MH = \frac{8-4}{2} = 2$, 所以 $EH = 2$ 7 分

作 $HK \perp AB$, 垂足为 K .

(解法一) 以 H 为原点, 以 $\overrightarrow{HK}$ 的方向为 x 轴的正方向建立空间直角坐标系, 如图所示, 则 $A(2, -2, 0), B(2, 6, 0), C(-2, 6, 0), F(0, 4, 2)$,

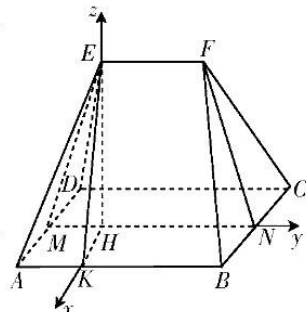
$\overrightarrow{AB} = (0, 8, 0), \overrightarrow{BF} = (-2, -2, 2)$ 8 分

设平面 ABF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 8y = 0, \\ -2x - 2y + 2z = 0, \end{cases}$ 9 分

令 $x=1$, 得 $\mathbf{n} = (1, 0, 1)$ 10 分

因为 $\overrightarrow{CF} = (2, -2, 2)$, 所以 $\cos \langle \overrightarrow{CF}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{CF} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{CF}| |\mathbf{n}|} = \frac{4}{2\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 11 分



故 CF 与平面 ABF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 12 分

(解法二) 因为 N 为 BC 的中点, 所以 C 到平面 ABF 的距离等于 N 到平面 ABF 的距离的 2 倍. 8 分

又 $NH \parallel AB$, 所以 N 到平面 ABF 的距离等于 H 到平面 ABF 的距离. 9 分

过 H 作 EK 的垂线(图略), 垂足为 G , 可证 $HG \perp$ 平面 ABF , 且 $HG = \frac{EH \cdot KH}{EK} = \sqrt{2}$ 10 分

因为 $CF = \sqrt{CN^2 + NF^2} = 2\sqrt{3}$ 11 分

所以 CF 与平面 ABF 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 12 分

评分细则:

【1】第(1)问解析第一行写了“平面 $ABFE \cap$ 底面 $ABCD = AB$ ”, 但未写“ $EF \subset$ 平面 $ABFE$ ”, 不扣分.

【2】第(1)问中, 还可以证明 $MN \perp BC$, 再由 $MN \cap FN = N$, 得 $BC \perp$ 平面 $EFNM$.

【3】第(2)问还可以用等体积法求 C 到平面 ABF 的距离 $d = 2\sqrt{2}$.

20. 解: (1) 运动员甲选择方案一, 若甲得分不低于 60 分, 则甲至少要完成 2 项传统运动项目, 1 分

故甲得分不低于 60 分的概率 $P = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$ 4 分

(2) 若乙选择方案一, 则乙完成的运动项目的个数 $X \sim B(3, \frac{1}{2})$, 5 分

所以乙最后得分的数学期望为 $30E(X) = 30 \times 3 \times \frac{1}{2} = 45$ 6 分

若乙选择方案二, 则乙得分 Y 的可能取值为 0, 30, 40, 70, 90, 120,

$P(Y=0) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$, $P(Y=30) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$,

$P(Y=40) = 2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$, $P(Y=70) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$,

$P(Y=90) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$, $P(Y=120) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$ 9 分

所以 Y 的数学期望 $E(Y) = 0 \times \frac{2}{9} + 30 \times \frac{2}{9} + 40 \times \frac{2}{9} + 70 \times \frac{2}{9} + 90 \times \frac{1}{18} + 120 \times \frac{1}{18} = \frac{385}{9}$ 11 分

因为 $\frac{385}{9} < 45$, 所以运动员乙应该选择方案一. 12 分

评分细则:

【1】第(1)问中, 若没有写“若甲得分不低于 60 分, 则甲至少要完成 2 项传统运动项目”, 直接得到“ $P = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$ ”, 不扣分.

【2】第(2)问中, 若用其他方法求得乙最后得分的数学期望为 45, 不扣分.

21. 解: (1) 当直线 MN 垂直于 x 轴时, 直线 MN 的方程为 $x=1$.

代入 $y^2 = 2px$, 得 $y = \pm \sqrt{2p}$ 1 分

因为 $\triangle OMN$ 的面积为 2, 所以 $\frac{1}{2} \times 1 \times 2\sqrt{2p} = 2$ 2 分

解得 $p=2$ 3 分

故 C 的方程为 $y^2 = 4x$ 4 分

(2) 由题意可知, 直线 MN 的斜率一定存在, 设直线 $MN: y = k(x-1) + 3 (k \neq 0)$,

则 $x = \frac{y-3}{k} + 1$, 代入 $y^2 = 4x$, 得 $ky^2 - 4y - 4k + 12 = 0$ 5 分

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $\Delta_1 = 16(k^2 - 3k + 1) > 0, y_1 + y_2 = \frac{4}{k}, y_1 y_2 = \frac{12 - 4k}{k}$, 6 分

$$|QM| \cdot |QN| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |3 - y_1| \times \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |3 - y_2|$$

$$= (1 + \frac{1}{k^2}) |9 - 3(y_1 + y_2) + y_1 y_2| = (1 + \frac{1}{k^2}) |9 - \frac{12}{k} + \frac{12 - 4k}{k}| = 5(1 + \frac{1}{k^2}), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设直线 $ST: y = k(x - 1) (k \neq 0)$, 则 $x = \frac{y}{k} + 1$, 代入 $y^2 = 4x$,
得 $ky^2 - 4y - 4k = 0$, 9 分

设 $S(x_3, y_3), T(x_4, y_4)$, 则 $\Delta_2 = 16 - 16k^2 > 0, y_3 - y_4 = \frac{4}{k}, y_3 y_4 = -4$, 10 分

$$|ST| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |y_3 - y_4| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \sqrt{(y_3 - y_4)^2 - 4y_3 y_4} = 4(1 + \frac{1}{k^2}), \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

故存在常数 $\Omega = \frac{5}{4}$, 使得 $|QM| \cdot |QN| = \Omega |ST|$ 恒成立. 12 分

评分细则:

【1】第(2)问中, 没有写判别式, 但写对了两根之和与两根之积, 不扣分.

【2】第(2)问中, 联立方程还可以消去 y , 特别是求 $|ST|$, 消去 y 会更简单, 其过程如下:

设直线 $ST: y = k(x - 1) (k \neq 0)$, 代入 $y^2 = 4x$, 得 $k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x - k^2 = 0$,

设 $S(x_3, y_3), T(x_4, y_4)$, 则 $x_3 + x_4 = \frac{2k^2 + 4}{k^2}$, 则 $|ST| = x_3 + x_4 + p = 4(1 + \frac{1}{k^2})$.

【3】第(2)问还可以这样解答: 设 MN 的方程为 $x = m(y - 3) + 1$, 代入 $y^2 = 4x$, 得 $y^2 - 4my + 12m - 4 = 0$,
可得 $|QM| \cdot |QN| = 5(1 + m)^2$.

设直线 ST 的方程为 $x = my + 1$, 代入 $y^2 = 4x$, 得 $y^2 - 4my - 4 = 0$, 可得 $|ST| = 4(m^2 + 4)$,

故存在 $\Omega = \frac{5}{4}$, 使得 $|QM| \cdot |QN| = \Omega |ST|$ 恒成立.

22. (1) 解: $f'(x) = (x + 1)e^x + 2ax$, 设 $f''(x)$ 为 $f'(x)$ 的导函数,

$$\text{则 } f''(x) = (x + 2)e^x + 2a, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

设 $m(x) = f''(x)$, 则 $m'(x) = (x + 3)e^x$.

当 $x < -3$ 时, $m'(x) < 0$; 当 $x > -3$ 时, $m'(x) > 0$ 2 分

所以 $m(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 上是减函数, 在 $(-3, +\infty)$ 上是增函数.

$$\text{所以 } m(x)_{\min} = \frac{1}{e^3} + 2a, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的凹函数, 所以 $-\frac{1}{e^3} + 2a \geq 0$, 4 分

解得 $a \geq \frac{1}{2e^3}$, 故 a 的取值范围是 $[\frac{1}{2e^3}, +\infty)$ 5 分

(2) 证明: $h'(x) = e^x - x - 1$, $h'(x)$ 的导函数 $h''(x) = e^x - 1$.

若 $x > 0$, 则 $h''(x) > 0$; 若 $x < 0$, 则 $h''(x) < 0$,

所以 $h'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 6 分

所以 $h'(x)$ 的最小值为 $h'(0) = 0$, 则 $h'(x) \geq 0$, $h(x)$ 为增函数. 7 分

又 $h(0) = 0$, 所以当 $x > 0$ 时, $h(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时, $h(x) < 0$ 8 分

(3) 证明: 由(2)知 $xh(x) = xe^x - \frac{1}{2}x^3 - x^2 - x \geq 0$, 即 $xe^x \geq \frac{1}{2}x^3 + x^2 + x$, 9 分

所以 $f(x) = xe^x + ax^2 + a \geq \frac{1}{2}x^3 + (a+1)x^2 + x + a$ 10 分

由(1)知, $a \geq \frac{1}{2e^3}$, 因为 $2.7 < e < 2.8$, 所以 $a > \frac{1}{2 \times 2.8^3} = \frac{1}{43.904} > \frac{1}{44}$, 11 分

所以 $\frac{1}{2}x^3 + (a+1)x^2 + x + a > \frac{1}{2}x^3 + (\frac{1}{44}+1)x^2 + x + \frac{1}{44}$,

故 $f(x) > \frac{1}{2}x^3 + \frac{45}{44}x^2 + x + \frac{1}{44}$ 12 分

评分细则:

【1】第(1)问还可以这样解答:

$f'(x) = (x+1)e^x + 2ax$, 设 $f''(x)$ 为 $f'(x)$ 的导函数,

则 $f''(x) = (x+2)e^x + 2a$ 1 分

依题意可得 $f''(x) = (x+2)e^x + 2a \geq 0$, 即 $a \geq -\frac{1}{2}(x+2)e^x$ 恒成立, 且 $f''(x) = 0$ 不恒成立. 2 分

设函数 $m(x) = -\frac{1}{2}(x+2)e^x$, 则 $m'(x) = -\frac{1}{2}(x+3)e^x$.

当 $x < -3$ 时, $m'(x) > 0$; 当 $x > -3$ 时, $m'(x) < 0$ 3 分

所以 $m(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 上是增函数, 在 $(-3, +\infty)$ 上是减函数.

所以 $m(x)_{\max} = \frac{1}{2e^3}$ 4 分

所以 $a \geq \frac{1}{2e^3}$, 故 a 的取值范围是 $[\frac{1}{2e^3}, +\infty)$ 5 分

【2】第(3)问如果用其他方法求解, 阅卷时请按步骤给分.