



海南省 2023—2024 学年高二年级学业水平诊断(一)

数 学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_2 = 1$, 且 $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} (n \geq 3)$, 则 $a_4 =$
A. 4 B. 6 C. 7 D. 13
2. 已知空间向量 $a = (-2, 2, 1), b = (1, 0, 3)$, 则 $a \cdot b =$
A. 1 B. 3 C. -1 D. -3
3. 已知直线 l 的方向向量为 $n = (3, 2)$, 且 l 经过点 $(3, 1)$, 则 l 的方程为
A. $2x - 3y - 6 = 0$ B. $2x - 3y - 3 = 0$
C. $3x + 2y - 11 = 0$ D. $3x - 2y - 7 = 0$
4. 圆 $C_1: (x-3)^2 + y^2 = 9$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 + 8y = 0$
A. 相切 B. 相交 C. 外离 D. 内含
5. 若抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点到直线 $\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3} = 0$ 的距离为 $2\sqrt{3}$, 则 C 的准线方程为
A. $x = 2$ B. $x = 1$ C. $x = -1$ D. $x = -2$
6. 在空间直角坐标系中, 已知点 $A(1, 1, 1), B(0, 1, 0), C(1, 2, 3)$, 则点 C 到直线 AB 的距离为
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$
7. 南宋数学家杨辉的重要著作《详解九章算法》中的“垛积术”问题介绍了高阶等差数列. 以高阶等差数列中的二阶等差数列为例, 其特点是从数列中的第二项开始, 每一项与前一項的差构成等差数列. 若某个二阶等差数列的前 4 项为 1, 4, 8, 13, 则该数列的第 20 项为
A. 191 B. 208 C. 229 D. 251

数学试题 第 1 页(共 4 页)

8. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 且与 x 轴垂直的直线与 C 的一个交点为 P , $\triangle PF_1F_2$ 的内心为 M , 若 $|MF_2| = \sqrt{2}$, 则 C 的离心率为
- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\sqrt{2}$

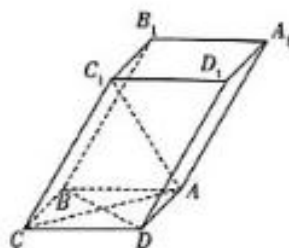
二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公比为 q , 前 n 项和为 S_n , 若 $q^3 + q^2 = 4q + 4$, 则 S_3 的值可能为
- A. 1 B. 3 C. 5 D. 7

10. 已知直线 $l: kx + 1 + 2k - y = 0$ 和圆 $O: x^2 + y^2 = 8$, 则
- A. 直线 l 恒过点 $(-2, 1)$ B. 直线 l 与圆 O 一定有两个交点
- C. 直线 l 可能与直线 $l': x - 2y + 2 = 0$ 垂直 D. 直线 l 被圆 O 截得的最短弦长为 $2\sqrt{2}$

11. 如图, 在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, $AB = \sqrt{2}$, $AA_1 = 2$, 且 $\cos \angle BCC_1 = \cos \angle DCC_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 则

- A. $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 1$
- B. $AA_1 \perp BD$
- C. $AC_1 = \sqrt{2}$
- D. 直线 AA_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$



12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 上顶点为 $B(0, \sqrt{2})$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, M, N 为 C 上关于原点对称的两点 (与 C 的顶点不重合), 则
- A. C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{1}{|MF_1|} + \frac{4}{|NF_1|} \geq \frac{5}{2}$
- C. $\triangle MNF_2$ 的面积随周长变大而变大 D. 直线 BM 和 BN 的斜率乘积为定值 $-\frac{1}{2}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $a = (2, -1, 3)$, $b = (x, 1, -1)$, 且 $a \perp b$, 则 $x =$ _____.
14. 已知直线 $l: x + 2y = 0$ 与直线 $m: ax + 4y + a = 0$ 平行, 则 l 与 m 之间的距离为 _____.
15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 点 $P(0, \sqrt{6}a)$, 且直线 PF 与 C 仅有

16. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 不等式 $(m - a_n)(m - a_{n+1}) < 0$ 恒成立, 则实数 $m =$ _____.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 9, a_1 + a_4 = 16$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{k+1} - S_{k-1} = S_6$, 求 k 的值.

18. (12 分)

在直角坐标系 xOy 中, 点 P 到直线 $x = -1$ 的距离等于点 P 到点 $F(1, 0)$ 的距离, 记动点 P 的轨迹为 C .

(I) 求 C 的方程;

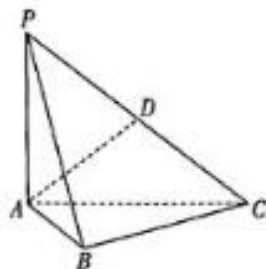
(II) 直线 $l: y = 2x - 2$ 与 C 交于 A, B 两点, 求线段 AB 的长.

19. (12 分)

如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA = 2AB = 4, BC = 2\sqrt{5}, AC = 2\sqrt{6}, D$ 为棱 PC 的中点.

(I) 证明: $BC \perp$ 平面 PAB ;

(II) 求直线 AD 与平面 PAB 所成角的正弦值.

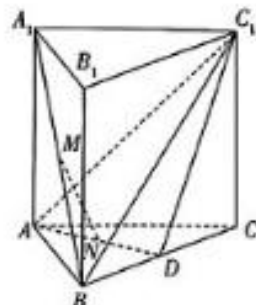


20. (12 分)

如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1=AB$, D, M, N 分别为 BC, A_1B, AD 的中点.

(I) 证明: $MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ;

(II) 求平面 A_1C_1B 与平面 AC_1D 夹角的余弦值.



21. (12 分)

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之积为 T_n , 已知 $a_n \neq 0$, 且 $a_n + T_n = a_n \cdot T_n$.

(I) 求 a_1, a_2 ;

(II) 求 T_n ;

(III) 证明: $\frac{1}{T_1 T_2 T_3} + \frac{1}{T_2 T_3 T_4} + \cdots + \frac{1}{T_n T_{n+1} T_{n+2}} < \frac{1}{12}$.

22. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 A , 上顶点为 B , O 为坐标原点, $|AB| = \sqrt{7}$,

$\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{3}$.

(I) 求 C 的方程;

(II) 过 C 的右焦点 F 作直线 l 与 C 交于 P, Q 两点 (均与点 B 不重合), 若 $\overrightarrow{BF} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BP}|} + \frac{\overrightarrow{BQ}}{|\overrightarrow{BQ}|} \right)$, 求 l 的方程.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线