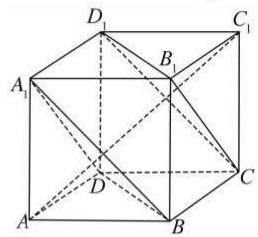


(五)

1. B $\frac{a+i}{1-3i} = \frac{(a+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{a-3}{10} + \frac{3a+1}{10}i$, 因为该复数在复平面内对应的点在虚轴上, 所以 $\frac{a-3}{10} = 0$, 所以 $a=3$, 故选 B.
2. B 因为 $A \neq B, A \cap B = A$, 所以 $A \subseteq B$, B 错误, 故选 B.
3. D 取 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 是无理数, $\tan \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$, 是无理数, $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = \pm \frac{4\sqrt{2}}{9}$, 是无理数, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{7}{9}$, 因为 $\sin \alpha$ 是有理数, 所以 $\sin^2 \alpha$ 一定是有理数, 所以 $\cos 2\alpha$ 一定是有理数, 故选 D.
4. D 由题意知 $30 = 10 \lg \frac{I}{I_0}$, 解得 $I = 10^{-9}$, 又由 $I = \frac{k}{s^2}$, 可得 $k = Is^2 = 10^{-9} \times 15^2 = 2.25 \times 10^{-7}$, 根据人耳能听到的最小声强为 10^{-12} , 所以 $s = \sqrt{\frac{k}{I_0}} = \sqrt{\frac{2.25 \times 10^{-7}}{10^{-12}}} = 150\sqrt{10}$ 米. 故选 D.
5. A 设该正六棱柱的底面边长为 a , 则 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 6 = 6\sqrt{3}$, $a=2$, 由正六棱柱挖去一个圆柱后表面积不变, 可得圆柱上、下底面积之和等于侧面积, 设圆柱底面半径为 r , 则 $2\pi r^2 = 2\pi rh$, 所以 $h=r$, 当圆柱底面圆与正六边形各边相切时 r 最大为 $\sqrt{3}$, 所以当 $h=\sqrt{3}$ 时, $V = \pi \times (\sqrt{3})^2 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}\pi$, A 正确, D 错误; 当 $h = \frac{3}{2}$ 时 $V = \pi r^2 h = \frac{27\pi}{8}$, B 错误; 当 $h=1$ 时 $V = \pi r^2 h = \pi$, C 错误, 故选 A.
6. A 由 $(x-2)^6 + (y^2-2)^3 + x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$ 可得 $(x-2)^6 + (x-2)^2 = (2-y^2)^3 + (2-y^2)$, 设 $f(x) = x^3 + x$, 则 $f((x-2)^2) = f(2-y^2)$, 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数, 所以 $(x-2)^2 = 2-y^2$, 即 $(x-2)^2 + y^2 = 2$, 点 (x, y) 在以点 $C(2, 0)$ 为圆心, 半径为 $\sqrt{2}$ 的圆上. 设 $\frac{y}{x} = k$, 则 $y = kx$. 直线 $y = kx$ 与圆 C 有公共点, 则圆心 C 到直线 $y = kx$ 的距离 $d = \frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}} \leq \sqrt{2}$, 解得 $-1 \leq k \leq 1$, 故选 A.
7. C 因为 $f(x) = ax^2, g(x) = x \ln x$, 所以 $f'(x) = 2ax, g'(x) = 1 + \ln x$. 若曲线 $f(x) = ax^2$ 与曲线 $g(x) = x \ln x$ 在 $x = t (t > 0)$ 处的切线平行, 则 $f'(t) = g'(t), f'(t) = g'(t)$, 即 $at = \frac{\ln t}{t}, a = \frac{1 + \ln t}{2t}$, 设 $h(t) = \frac{1 + \ln t}{2t}$, 则 $h'(t) = -\frac{\ln t}{2t^2}$, 所以 $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $a \leq h(1) = \frac{1}{2}$, 又 $t \rightarrow 0, h(t) \rightarrow -\infty$, 所以 $a \in (-\infty, \frac{1}{2}]$, 令 $\frac{1 + \ln t}{2t} = \frac{\ln t}{t}$, 得 $\ln t = 1, t = e$, 所以 $a \neq \frac{1}{e}$, 所以 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, \frac{1}{2}]$, 故选 C.
8. B 如图所示, 可得 $AC_1 \perp$ 平面 $A_1BD, AC_1 \perp$ 平面 $B_1CD_1, AC_1 = \sqrt{3}$, 点 A 到平面 A_1BD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以点 P 与点 A 重合或点 P 在 $\triangle B_1CD_1$ 上, 当点 P 与点 A 重合时, $PC_1 = \sqrt{3}$, A 可能, 当点 P 在 $\triangle B_1CD_1$ 上时, $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq PC_1 \leq 1$, CD 可能, B 不可能, 故选 B.



9. ABD 这 10 个数据的极差为 $7579 - 6698 = 881$, A 正确; 中位数为 $\frac{6971 + 6889}{2} = 6930$, B 正确; 平均数为 6993.3 , C 错误, D 正确, 故选 ABD.

10. ACD 因为点 A, B, P 共线, 所以 $\frac{2t}{-1} = \frac{t-3}{2}$, 所以 $t = \frac{3}{5}$, A 正确; 因为 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = -2t + 2t - 6 = -6 < 0$, 所以 $\angle BPA$ 不可能是锐角, B 错误; 与 \vec{PA} 垂直的单位向量的坐标为 $(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$ 和 $(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5})$, C 正确; 若 $(\vec{PA} + \vec{PB}) \cdot \vec{AB} = 0$, 则 $\vec{PA}^2 = \vec{PB}^2$, 所以 $(2t)^2 + (t-3)^2 = 5$, 整理得 $5t^2 - 6t + 4 = 0$, 该方程无解, D 正确, 故选 ACD.

11. BCD 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $-x \in (0, +\infty)$, 所以 $f(-x) = -x - \frac{1}{4}x^2$, 因为 $f(-x) = -f(x)$, 所以 $f(x) = x + \frac{1}{4}x^2$, A 错误; 由区间的定义可得 $\begin{cases} b > a \\ \frac{2}{a} > \frac{2}{b} \end{cases}$, 所以 $\frac{2}{a} - \frac{2}{b} = \frac{2(b-a)}{ab} > 0$, 所以 $ab > 0$, B 正确; 若 $a > 0$, 则

- $x \in [a, b]$ 时, $f(x) = x - \frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1 \leq 1$, 所以 $\frac{2}{a} \leq 1, a \geq 2, b > a \geq 2$, C 正确; 若 $b < 0$, 则 $x \in [a, b]$ 时, $f(x) = x + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}(x+2)^2 - 1 \geq -1$, 所以 $\frac{2}{b} \geq -1, b \leq -2$, 此时 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, $f(a) = \frac{2}{a}, a + \frac{1}{4}a^2 = \frac{2}{a}, a^2 + \frac{1}{4}a^3 = 2$, D 正确, 故选 BCD.
12. AC 当 $t=2$ 时, $x_A = x_B = 2, |AF| + |BF| = x_A + x_B + p = 4 + p$, A 正确; 由点 A、B 关于 x 轴对称及 $|AB| = \sqrt{2}|OA|$ 得 $OA \perp OB$. 不妨设 $A(t, \sqrt{2pt})$, 则 $\sqrt{2pt} = t$, 所以 $t = 2p, |AF| + |BF| = x_A + x_B + p = 2p + 2p + p = 5p$; B 错误; 若四边形 $OAFB$ 为正方形, 则 $t = \frac{p}{4}$, 且 $\frac{p}{4} = \sqrt{2pt} = \sqrt{\frac{p^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}p}{2}$, 矛盾, C 正确; 若存在两个不同的 t 值, 使得 $\angle AFB = 120^\circ$, 则点 $A(t, \sqrt{2pt})$ 在直线 $y = \sqrt{3}(x - \frac{p}{2})$ 或直线 $y = -\sqrt{3}(x - \frac{p}{2})$ 上, 所以 $\sqrt{2pt} = \sqrt{3}(t - \frac{p}{2})$ 或 $\sqrt{2pt} = -\sqrt{3}(t - \frac{p}{2})$, 即 $2pt = 3(t - \frac{p}{2})^2$, 即 $12t^2 - 20pt + 3p^2 = 0$, 解得 $t = \frac{3}{2}p$ 或 $t = \frac{1}{6}p$, 所以 $\begin{cases} 0 < \frac{3}{2}p \leq 4 \\ 0 < \frac{1}{6}p \leq 4 \end{cases}$, 所以 $0 < p \leq \frac{8}{3}$, D 错误, 故选 AC.
13. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 双曲线 C 的渐近线方程为 $x \pm ay = 0$, 因为点 $P(2, 0)$ 到双曲线 C 的一条渐近线的距离为 1, 所以 $\frac{2}{\sqrt{a^2+1}} = 1$, 解得 $a = \sqrt{3}$, 所以 $c = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$, C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
14. -60 $(x^2 - y - 1)^6$ 的展开式中, x^2y^2 的系数为 $C_6^4 C_2^2 (-1)^2 C_3^3 (-1)^3 = -60$.
15. -12 因为 $a_{n+1} = a_n + a_5$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 a_5 的等差数列, 所以 $A = \{-a_5, 0, a_5, 2a_5, 3a_5\}$, 因为 $4 \in A, 6 \in A$, 所以只能是 $a_5 = 2, \{a_n\}$ 的前 4 项依次为 $-6, -4, -2, 0$, 所以 S_4 的最小值为 -12 .
16. $(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}]$ 令 $\omega x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 得 $x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{3}}{\omega}, k \in \mathbf{Z}$. 由题意知 $\begin{cases} 0 < \frac{\pi}{3\omega} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{4\pi}{3\omega} \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ 且 $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < -\frac{2\pi}{3\omega} < 0 \\ -\frac{5\pi}{3\omega} \leq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$, 解得 $\frac{4}{3} < \omega \leq \frac{8}{3}$.
17. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $AC(1 + \cos \angle ACB) = AB \cos \angle BAC$ 及正弦定理得 $\sin B + \sin B \cos \angle ACB = \sin \angle ACB \cos \angle BAC$, 1 分
即 $\sin(\angle BAC + \angle ACB) + \sin B \cos \angle ACB = \sin \angle ACB \cos \angle BAC$,
即 $\sin \angle BAC \cos \angle ACB + \sin B \cos \angle ACB = 0$,
即 $\cos \angle ACB(\sin B + \sin \angle BAC) = 0$, 3 分
在 $\triangle ABC$ 中, $\sin B + \sin \angle BAC > 0$, 所以 $\cos \angle ACB = 0, \angle ACB = \frac{\pi}{2}$, 4 分
所以 $BC = AB \cos B = 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ 5 分
(2) 由 (1) 知 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, 因为 $AB = 2$,
所以 $AC = 2 \sin B, BC = CD = 2 \cos B, DA = \cos B$, 7 分
在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理得 $\cos D = \frac{CD^2 + DA^2 - AC^2}{2CD \cdot DA} = \frac{4 \cos^2 B + \cos^2 B - 4 \sin^2 B}{4 \cos^2 B} = \frac{5}{4} - \tan^2 B = \frac{7}{8}$,
..... 9 分
所以 $\tan B = \frac{\sqrt{6}}{4}$ 10 分
18. 解: (1) 由 $\frac{2}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1$ 得 $\frac{2}{a_{n+1}} - 2 = \frac{1}{a_n} - 1$,
即 $\frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{a_n} - 1)$, 1 分
若 $\frac{1}{a_1} - 1 = 0$, 则 $\frac{1}{a_2} - 1 = 0$, 此时 $a_1 = a_2 = 1$, 与 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{7}{2}$ 矛盾, 所以 $\frac{1}{a_1} - 1 \neq 0$ 2 分
所以数列 $\{\frac{1}{a_n} - 1\}$ 是首项为 $\frac{1}{a_1} - 1$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 3 分
所以 $\frac{1}{a_n} - 1 = (\frac{1}{a_1} - 1)(\frac{1}{2})^{n-1}, \frac{1}{a_n} = (\frac{1}{a_1} - 1)(\frac{1}{2})^{n-1} + 1$, 4 分

所以 $\frac{1}{a_2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a_1} - 1) + 1 = \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2}, \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{3}{2a_1} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}, \frac{1}{a_1} = 2,$

所以 $\frac{1}{a_n} = (\frac{1}{2})^{n-1} + 1. \dots\dots\dots 6$ 分

(2)由(1)得 $\frac{1}{a_n} = (\frac{1}{2})^{n-1} + 1$, 所以 $b_n = \frac{n}{a_n} = \frac{n}{2^{n-1}} + n, \dots\dots\dots 7$ 分

$S_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n(n+1)}{2},$

$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} + \frac{n(n+1)}{4}, \dots\dots\dots 8$ 分

两式相减得 $\frac{1}{2}S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} + \frac{n(n+1)}{4}$

$= \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} + \frac{n(n+1)}{4} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} + \frac{n(n+1)}{4}$

$= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n(n+1)}{4}, \dots\dots\dots 11$ 分

所以 $S_n = 4 + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n+2}{2^{n-1}}. \dots\dots\dots 12$ 分

19. 解:(1)5个数据中有2个大于500,所以所求概率为 $\frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}. \dots\dots\dots 2$ 分

(2)设 A_1, A_2, A_3 分别为抽取的瘦身网民为青年、中年、老年, B 为“抽取的一名瘦身网民经常购买鸡胸肉”,
则 $P(A_1) = 0.5, P(A_2) = 0.4, P(A_3) = 0.1, P(B|A_1) = 0.8, P(B|A_2) = 0.5, P(B|A_3) = 0.2, \dots\dots\dots 4$ 分
 $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = 0.5 \times 0.8 + 0.4 \times 0.5 + 0.1 \times 0.2 = 0.62,$

$\dots\dots\dots 6$ 分
故 $P(A_2|B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.4 \times 0.5}{0.62} = \frac{10}{31}. \dots\dots\dots 8$ 分

(3)由题意可得 $\mu = 1 \times \frac{25}{100} + 3 \times \frac{32}{100} + 5 \times \frac{25}{100} + 7 \times \frac{12}{100} + 9 \times \frac{6}{100} = 3.81. \dots\dots\dots 10$ 分

所以中国瘦身网民每年愿意在瘦身上支出的金额超过8500元的概率为
 $P(X \geq 8.5) = P(X \geq \mu + 2\sigma) = \frac{1 - P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)}{2} \approx \frac{1 - 0.9545}{2} = 0.02275. \dots\dots\dots 12$ 分

20. (1)证明:因为 AB, AC, AA_1 两两垂直, $AB \cap AA_1 = A$,
所以 $AC \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

因为 $BB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $AC \perp BB_1, \dots\dots\dots 1$ 分

在棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \parallel A_1B_1$, 所以 $AA_1 \perp A_1B_1$,
因为 $AA_1 = A_1B_1 = 1$, 所以 $AB_1 = \sqrt{2}$, 且 $\angle B_1AB = 45^\circ$,

因为 $BB_1 = \sqrt{2}$, 所以 $AB_1 = BB_1, \angle B_1BA = \angle B_1AB$,
所以 $\angle AB_1B = 90^\circ, AB_1 \perp BB_1. \dots\dots\dots 3$ 分

因为 $AC \cap AB_1 = A$, 所以 $BB_1 \perp$ 平面 AB_1C ,
因为 $BB_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以平面 $AB_1C \perp$ 平面 $BCC_1B_1. \dots\dots\dots 5$ 分

(2)解:因为 AB, AC, AA_1 两两垂直, 以点 A 为坐标原点, 以 AC, AB, AA_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,
设 $AC = a(a > 0)$.

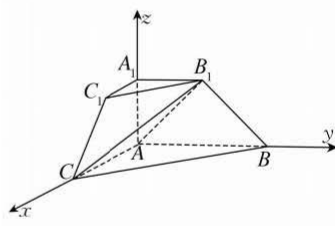
则 $A(0, 0, 0), C(a, 0, 0), A_1(0, 0, 1), B_1(0, 1, 1), B(0, 2, 0),$
 $\overrightarrow{AC} = (a, 0, 0), \overrightarrow{CB_1} = (-a, 1, 1), \overrightarrow{A_1B_1} = (0, 1, 0), \overrightarrow{BB_1} = (0, -1, 1),$

$\dots\dots\dots 6$ 分
由(1)知平面 AB_1C 的一个法向量为 $\overrightarrow{BB_1} = (0, -1, 1). \dots\dots\dots 7$ 分

设平面 A_1B_1C 的一个法向量为 $m = (x_1, y_1, z_1)$, 则有 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0 \\ m \cdot \overrightarrow{CB_1} = 0 \end{cases}$, 得

$\begin{cases} y_1 = 0 \\ -ax_1 + y_1 + z_1 = 0 \end{cases}$, 取 $x_1 = 1$, 得 $m = (1, 0, a), \dots\dots\dots 9$ 分

所以 $\cos \langle m, \overrightarrow{BB_1} \rangle = \frac{m \cdot \overrightarrow{BB_1}}{|m| |\overrightarrow{BB_1}|} = \frac{1 \times 0 + 0 \times (-1) + a \times 1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + a^2} \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{a}{\sqrt{2a^2 + 2}}. \dots\dots\dots 10$ 分



- 因为二面角 $A-B_1C-A_1$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,
- 所以 $\frac{a}{\sqrt{2a^2+2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 解得 $a = \sqrt{2}$,
- 所以 $CB_1 = \sqrt{AC^2 + AB_1^2} = \sqrt{2+2} = 2$ 12分
21. 解: (1) 由椭圆定义得 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, 1分
- 所以 $|PF_1| \cdot |PF_2| \leq \left(\frac{|PF_1| + |PF_2|}{2}\right)^2 = a^2$, 当 $|PF_1| = |PF_2|$ 时取等号, 所以 $a^2 = 2b^2$, 2分
- 由 $\triangle PAF_2$ 周长为 $|PA| + |PF_2| + |AF_2| = |PA| + 2a - |PF_1| + |AF_2| \leq 3a + |AF_1| = 4a = 8\sqrt{2}$, 当且仅当 P, A, F_1 共线时取等号, 4分
- 所以 $a = 2\sqrt{2}, b^2 = \frac{a^2}{2} = 4$,
- 所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 5分
- (2) 由(1)得 $F_2(2, 0)$, 因为直线 l 过点 F_2 , 设直线 l 的方程为 $x = my + 2$, 6分
- 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = my + 2 \end{cases}$, 得 $(m^2 + 2)y^2 + 4my - 4 = 0$,
- 所以 $y_1 + y_2 = -\frac{4m}{m^2 + 2}, y_1 y_2 = -\frac{4}{m^2 + 2}$, 7分
- 设 $D(t, 0)$, 因为点 E 是直线 DM 上的动点, 且点 E 关于 x 轴的对称点恒在直线 DN 上,
- 所以直线 DM, DN 关于 x 轴对称, 8分
- 所以 $k_{DM} + k_{DN} = \frac{y_1}{x_1 - t} + \frac{y_2}{x_2 - t} = \frac{y_1}{my_1 + 2 - t} + \frac{y_2}{my_2 + 2 - t}$
- $= \frac{2my_1 y_2 + (2-t)(y_1 + y_2)}{(my_1 + 2 - t)(my_2 + 2 - t)} = 0$, 10分
- 因为 $2my_1 y_2 + (2-t)(y_1 + y_2) = -\frac{8m}{m^2 + 2} - \frac{8m - 4tm}{m^2 + 2} = -\frac{(16 - 4t)m}{m^2 + 2} = 0$,
- 所以 $16 - 4t = 0, t = 4$, 所以点 D 的坐标为 $(4, 0)$ 12分
22. (1) 解: 因为 $f(x) = e^x - 2ae^{-x} - (2a+1)e^x + a^x (x > 0)$,
- 所以 $f'(x) = e^x + 2ae^{-x} - (2a+1) = \frac{e^{2x} - (2a+1)e^x + 2a}{e^x}$, 2分
- 因为 $x > 0, e^x > 1$,
- 当 $2a \leq 1$, 即 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 3分
- 当 $2a > 1$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, $x \in (0, \ln 2a)$ 时 $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减, $x \in (\ln 2a, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增. 4分
- 综上, 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \ln 2a)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2a, +\infty)$ 上单调递增. 5分
- (2) 证明: 由(1)知, 若 $f(x)$ 有极值点 x_0 , 则 $a > \frac{1}{2}$, 且 $x_0 = \ln 2a$, 6分
- 所以 $f(x_0) = f(\ln 2a) = a^2 + 2a - 1 - (2a+1)\ln 2a$, 7分
- 设 $g(a) = a^2 + 2a - 1 - (2a+1)\ln 2a (a > \frac{1}{2})$,
- 则 $g'(a) = 2a - \frac{1}{a} - 2\ln 2a$,
- 设 $h(a) = 2a - \frac{1}{a} - 2\ln 2a$, 则 $h'(a) = 2 + \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} = \frac{2a^2 - 2a + 1}{a^2} = \frac{a^2 + (a-1)^2}{a^2} > 0$,
- 所以 $g'(a)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增,
- 且 $g'(1) = 1 - 2\ln 2 = 1 - \ln 4 < 0, g'(2) = 4 - \frac{1}{2} - 2\ln 4 > 3 - \ln 16 > 3 - \ln e^3 = 0$,
- 所以存在 $a_0 \in (1, 2)$, 使得 $g'(a_0) = 0$, 即 $\ln 2a_0 = a_0 - \frac{1}{2a_0}$, 10分

当 $a \in (\frac{1}{2}, a_0)$ 时, $g'(a) < 0$, $g(a)$ 单调递减; 当 $a \in (a_0, +\infty)$ 时, $g'(a) > 0$, $g(a)$ 单调递增,

所以 $g(a) \geq g(a_0) = a_0^2 + 2a_0 - 1 - (2a_0 + 1)(a_0 - \frac{1}{2a_0}) = -a_0^2 + a_0 + \frac{1}{2a_0}$.

所以存在 $a_0 \in (1, 2)$, 使得 $f(x_0) \geq -a_0^2 + a_0 + \frac{1}{2a_0}$ 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 ([网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。

