

## 银川一中 2022 届高三年级第二次月考

# 理科数学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 作答时, 务必将答案写在答题卡上。写在本试卷及草稿纸上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 满分 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 集合  $P = \{1, 2\}$  的真子集的个数是

- A. 7                      B. 3                      C. 4                      D. 8

2. 已知  $i$  为虚数单位, 复数  $z = \frac{2i-1}{i+1}$ , 则  $z$  的虚部为

- A.  $\frac{3}{2}i$                       B.  $\frac{3}{2}$                       C.  $-\frac{3}{2}$                       D.  $-\frac{3}{2}i$

3. 已知命题  $p: \exists x \in \mathbf{R}, \sin x < 1$ ; 命题  $q: \forall x \in \mathbf{R}, e^{|x|} \geq 1$ , 则下列命题中为真命题的是

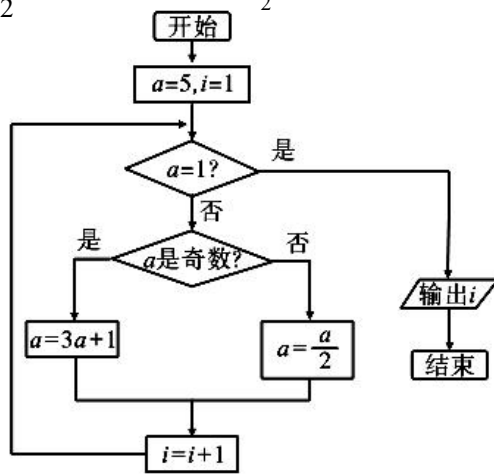
- A.  $p \wedge q$                       B.  $\neg p \wedge q$                       C.  $p \wedge \neg q$                       D.  $\neg(p \vee q)$

4. 若  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上周期为 3 的偶函数, 且当  $0 < x \leq \frac{3}{2}$  时,  $f(x) = \log_4 x$ , 则  $f\left(-\frac{13}{2}\right) =$

- A. -2                      B. 2                      C.  $-\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{1}{2}$

5. 数学猜想是推动数学理论发展的强大动力, 是数学发展中最活跃、最主动、最积极的因素之一, 是人类理性中最富有创造性的部分. 1927 年德国的一个大学生考拉兹提出一个猜想: 对于每一个正整数, 如果它是奇数, 对它乘 3 再加 1, 如果它是偶数, 对它除以 2, 这样循环, 最终结果都能得到 1. 如图是根据这个猜想设计的程序框图, 则输出的  $i$  为

- A. 4                      B. 5                      C. 6                      D. 7



6.  $\left(x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$  的展开式中的常数项为

- A. 8                      B. 28                      C. 56                      D. 70

7. 有 12 名同学合影, 站成了前排 4 人后排 8 人, 现摄影师要从后排 8 人中抽 2 人调整到前排, 若其他人的相对顺序不变, 则不同调整方法的种数是

- A. 168                      B. 260                      C. 840                      D. 560

8. 袋子中有四个小球, 分别写有“和、平、世、界”四个字, 有放回地从中任取一个小球, 直到“和”“平”两个字都取到就停止, 用随机模拟的方法估计恰好在第三次停止的概率. 利用电脑随机产生 0 到 3 之间取整数值的随机数, 分别用 0, 1, 2, 3 代表“和、平、世、界”这四个字, 以每三个随机数为一组, 表示取球三次的结果, 经随机模拟产生了以下 24 个

随机数组:

232 321 230 023 123 021 132 220 011 203 331 100

231 130 133 231 031 320 122 103 233 221 020 132

由此可以估计, 恰好第三次就停止的概率为

- A.  $\frac{1}{8}$       B.  $\frac{1}{6}$       C.  $\frac{1}{4}$       D.  $\frac{1}{3}$

9.  $\int_0^1 (e^x - \sqrt{1-x^2}) dx =$

- A.  $e - \frac{\pi}{4}$       B.  $e - 1 - \frac{\pi}{4}$       C.  $e - 1 - \frac{\pi}{2}$       D.  $e - \frac{\pi}{2}$

10. 把不超过实数  $x$  的最大整数记为  $[x]$ , 则函数  $f(x)=[x]$  称作取整函数, 又叫高斯函数, 在  $[2,5]$  上任取  $x$ , 则  $[x]=[\sqrt{2x}]$  的概率为

- A.  $\frac{1}{4}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{2}{3}$

11. 已知定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $f(x)$  满足  $f(-x)+f(x)=0$ , 且  $f(1-x)=f(1+x)$ , 则下列结论一定正确的是 ( )

- A.  $f(x+2)=f(x)$       B. 函数  $y=f(x)$  的图象关于点  $(2,0)$  对称  
C. 函数  $y=f(x+1)$  是奇函数      D.  $f(2-x)=f(x-1)$

12. 已知定义在  $[\frac{1}{e}, e]$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x)=f(\frac{1}{x})$ , 且当  $x \in [\frac{1}{e}, 1]$  时,  $f(x)=x \ln x + 1$ , 若方程  $f(x) - \frac{1}{2}x - a = 0$  有三个不同的实数根, 则实数  $a$  的取值范围是

- A.  $(\frac{1}{3e}, 1 - \frac{1}{e}]$       B.  $(\frac{1}{3e}, 1 - \frac{3}{2e}]$       C.  $(1 - e^{-\frac{1}{2}}, 1 - \frac{1}{e}]$       D.  $(1 - e^{-\frac{1}{2}}, 1 - \frac{3}{2e}]$

二、填空题: (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知函数  $f(x)=x^2 - \frac{4}{x}$ , 则  $f(x)$  在  $x=2$  处的切线方程是\_\_\_\_\_.

14. 在一个不透明的袋中装有 5 个白球, 3 个红球 (除颜色外其他均相同), 从中任意取出 2 个小球, 记事件 A 为“取出的球中有红色小球”, 事件 B 为“取出的 2 个小球均是红球”, 则  $P(B|A)=$ \_\_\_\_\_.

15. 一道四个选项的选择题, 赵、钱、孙、李各选了一个选项, 且选的恰好各不相同.

赵说: “我选的是 A.”

钱说: “我选的是 B, C, D 之一.”

孙说: “我选的是 C.”

李说: “我选的是 D.”

已知四人中只有一人说了假话, 则说假话的人可能是\_\_\_\_\_.

16. 已知函数  $f(x)=e^x + e^{-x} + |x|$ . 下面四个结论

- ①  $f(x)$  是奇函数      ②  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上为增函数  
③ 若  $x \neq 0$ , 则  $f(x + \frac{1}{x}) > e^2 + 2$       ④  $f(3x) < f(f(x))$  对任意实数  $x$  恒成立

其中正确的是\_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分

17. (12 分)

设  $f(x)=\lg(2a-x)$ , 其中  $a$  为实数.

(1) 设集合  $A=\{x|y=f(x)\}$ , 集合  $B=\{y|y=-2^x, x \leq 0\}$ , 若  $B \subseteq A$ , 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 若集合  $C=\{x|\lg(x-1)+\lg(3-x)=f(x)\}$  中的元素有且仅有 2 个, 求实数  $a$  的取值范围.

18. (12分)

设函数  $f(x) = (kx-1)e^x$

- (1) 当  $k=2$  时, 求曲线  $y=f(x)$  的极值;  
 (2) 若函数  $f(x)$  在区间  $(-2,2)$  内单调递减, 求  $k$  的取值范围.

19. (12分)

核酸检测是诊断新冠肺炎的重要依据, 首先取病人的唾液或咽拭子的样本, 再提取唾液或咽拭子样本里的遗传物质, 如果有病毒, 样本检测会呈现阳性, 否则为阴性. 某检测点根据统计发现, 该处疑似病例核酸检测呈阳性的概率为  $\frac{1}{4}$ . 现有 4 例疑似病例, 分别对其取样检测, 多个样本检测时, 既可以逐个化验, 也可以将若干个样本混合在一起化验. 混合样本中只要有病毒, 则混合样本化验结果就全呈阳性. 若混合样本呈阳性, 则再将该组中每一个备份的样本逐一进行化验; 若混合样本呈阴性, 则判定该组各个样本均为阴性, 无需再检验. 现有以下三种方案:

- 方案一: 逐个化验;  
 方案二: 四个样本混合在一起化验;  
 方案三: 平均分成两组, 每组两个样本混合在一起, 再分组化验.  
 在新冠肺炎爆发初期, 由于检查能力不足, 化验次数的期望值越小, 则方案越“优”.

- (1) 求 4 个疑似病例中至少有 1 例呈阳性的概率;  
 (2) 现将该 4 例疑似病例样本进行化验, 请问: 方案一、二、三中哪个最“优”? 做出判断并说明理由.

20. (12分)

2021年3月1日, 国务院新闻办公室举行新闻发布会, 工业和信息化部长肖亚庆先生提出了芯片发展的五项措施, 进一步激励国内科技巨头加大了科技研发投入的力度. 中华技术有限公司拟对“麒麟”手机芯片进行科技升级, 根据市场调研与模拟, 得到科技升级投入  $x$  (亿元) 与科技升级直接纯收益  $y$  (亿元) 的统计数据如下:

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x$	2	3	4	6	8	10	13	21	22	23	24	25
$y$	13	22	31	42	50	56	58	68.5	68	67.5	66	66

当  $0 < x \leq 17$  时, 建立了  $y$  与  $x$  的两个回归模型: 模型①:  $\hat{y} = 4.1x + 11.8$ ; 模型②:  $\hat{y} = 21.3\sqrt{x} - 14.4$ ; 当  $x > 17$  时, 确定  $y$  与  $x$  满足的线性回归方程为  $\hat{y} = -0.7x + a$ .

(1) 根据下列表格中的数据, 比较当  $0 < x \leq 17$  时模型①、②的相关指数  $R^2$  的大小, 并选择拟合精度更高、更可靠的模型.

回归模型	模型①	模型②
回归方程	$\hat{y} = 4.1x + 11.8$	$\hat{y} = 21.3\sqrt{x} - 14.4$
$\sum_{i=1}^7 (y_i - \hat{y}_i)^2$	182.4	79.2

(附: 刻画回归效果的相关指数  $R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ ,  $\sqrt{17} \approx 4.1$ )

(2) 为鼓励科技创新, 当科技升级的投入不少于 20 亿元时, 国家给予公司补贴 5 亿元, 以回归方程为预测依据, 应用 (1) 的结论, 比较科技升级投入 17 亿元与 20 亿元时公司实际收益的大小.

(附: 线性回归方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$  的系数关系:  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ )

(3) 科技升级后,“麒麟”总片的效率  $X$  大幅提高,经实际试验得  $X$  大致服从正态分布  $N(0.52, 0.01^2)$ . 公司对科技升级团队的奖励方案如下:若总片的效率不超过 50%, 不予奖励;若总片的效率超过 50%, 但不超过 53%, 每部总片奖励 2 元;若总片的效率超过 53%, 每部总片奖励 4 元. 记  $Y$  为每部总片获得的奖励, 求  $E(Y)$  (精确到 0.01).

(附:若随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ( $\sigma > 0$ ), 则  $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$ ,  $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$ )

21. (12 分)

已知函数  $f(x) = e^{x-1}$ ,  $g(x) = \ln x - 1$ , 其中  $e$  为自然对数的底数.

(1) 当  $x > 0$  时, 求证:  $f(x) \geq g(x) + 2$ ;

(2) 是否存在直线与函数  $y = f(x)$  及  $y = g(x)$  的图象均相切? 若存在, 这样的直线最多有几条? 并给出证明. 若不存在, 请说明理由.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 两题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 以  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho \sin^2 \theta + 4 \sin \theta - \rho = 0$ , 直线  $l$  过定点  $P(1, 1)$  且与曲线  $C$  交于  $A, B$  两点.

(1) 求曲线  $C$  的直角坐标方程;

(2) 若直线  $l$  的斜率为 2, 求  $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$  的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲]

已知函数  $f(x) = |x-3| + |x+m|$ .

(1) 若  $m=1$ , 求不等式  $f(x) \geq 6$  的解集;

(2) 若  $\exists x \in \mathbb{R}$ , 使得  $f(x) < 2m$ , 求  $m$  的取值范围.

### 银川一中 2022 届高三第二次月考数学(理科) (参考答案)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	B	A	C	C	B	C	A	B	B	B	D

#### 二、填空题

13.  $y = 5x - 8$     14.  $\frac{1}{6}$     15. 孙 李    16. 2 3 4

#### 三、解答题

17. 解: (1) 化简  $A = \{x | y = f(x)\} = (-\infty, 2a)$ ,  $B = \{y | y = -2^x, x \leq 0\} = [-1, 0)$ ,

又  $B \subseteq A$ , 所以  $2a \geq 0$ ,  $a \geq 0$

(2) 由  $\lg(x-1) + \lg(3-x) = f(x) = \lg(2a-x)$ ,

$$\begin{cases} (x-1)(3-x) = (2a-x) \\ x-1 > 0 \\ 3-x > 0 \\ 2a-x > 0 \end{cases} \quad \text{等价于 } 2a = -x^2 + 5x - 3, \text{ 且 } 1 < x < 3,$$

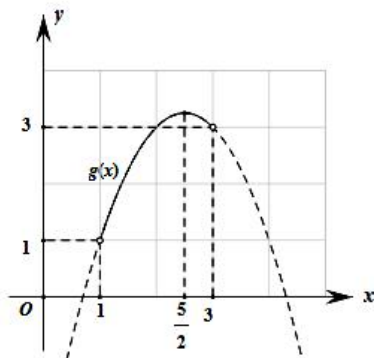
设  $g(x) = -x^2 + 5x - 3$ , 在  $(1, \frac{5}{2})$  上严格增,

在  $(\frac{5}{2}, 3)$  上严格减,  $g(1) = 1, g(3) = 3$ ,

$g(x)$  在  $(0, 3)$  内的图象如图所示.

由题意等价于直线  $y = 2a$  与函数  $g(x) = -x^2 + 5x - 3$

在  $(1, 3)$  上恰有两个交点,



此时  $3 < 2a < f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{13}{4}$ ,  $\therefore \frac{3}{2} < a < \frac{13}{8}$ .

18. 解: (1)  $\because k = 2$ ,  $f(x) = (2x-1)e^x$ ,  $f(0) = -1$ ,

$f'(x) = (2x+1)e^x$ , 所以函数在  $x = -\frac{1}{2}$  处取得极小值  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-2}{\sqrt{e}}$

(2)  $f'(x) = (kx+k-1)e^x$

$\because$  函数  $f(x)$  在区间  $(-2, 2)$  内单调递减,

$\therefore f'(x) \leq 0$  在区间  $(-2, 2)$  上恒成立;

即  $(kx+k-1)e^x \leq 0$ ,  $\because e^x > 0 \quad \therefore kx+k-1 \leq 0$

即  $kx+k-1 \leq 0$  在区间  $(-2, 2)$  上恒成立

$\therefore \begin{cases} -2k+k-1 \leq 0 \\ 2k+k-1 \leq 0 \end{cases}$ , 解得  $-1 \leq k \leq \frac{1}{3}$ ,

$\therefore k$  的取值范围是  $-1 \leq k \leq \frac{1}{3}$

19. 【解】

(1) 用  $\xi$  表示 4 个疑似病例中化验呈阳性的人数, 则  $\xi \sim B\left(4, \frac{1}{4}\right)$ ,

由题意可知, 4 个疑似病例中至少有 1 例呈阳性的概率为

$$1 - P(\xi = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)^4 = \frac{175}{256};$$

(2) 方案一: 逐个检验, 检验次数为 4.

方案二: 混合在一起检测, 记检测次数为  $X$ , 则随机变量  $X$  的可能取值为 1, 5, 所以

$$P(X=1) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^4 = \frac{81}{256},$$

$$P(X=5) = 1 - \frac{81}{256} = \frac{175}{256},$$

所以随机变量  $X$  的分布列为:

$X$	1	5
$P$	$\frac{81}{256}$	$\frac{175}{256}$

所以方案二检测次数  $X$  的数学期望为  $E(X) = 1 \times \frac{81}{256} + 5 \times \frac{175}{256} = \frac{239}{64}$ ;

方案三: 每组两个样本检测时, 呈阴性的概率为  $\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ ,

设方案三的检测次数为随机变量  $Y$ , 则  $Y$  的可能取值为 2, 4, 6, 所以

$$P(Y=2) = \left(\frac{9}{16}\right)^2 = \frac{81}{256},$$

$$P(Y=4) = C_2^4 \times \frac{9}{16} \times \frac{7}{16} = \frac{126}{256},$$

$$P(Y=6) = \left(\frac{7}{16}\right)^2 = \frac{49}{256},$$

所以随机变量  $Y$  的分布列为:

$Y$	2	4	6
-----	---	---	---

$P$	$\frac{81}{256}$	$\frac{126}{256}$	$\frac{49}{256}$
-----	------------------	-------------------	------------------

所以方案三检测次数 $Y$ 的期望为 $E(Y) = 2 \times \frac{81}{256} + 4 \times \frac{126}{256} + 6 \times \frac{49}{256} = \frac{960}{256} = \frac{15}{4}$ ,

因为 $E(X) < E(Y) < 4$ ,

所以选择方案二最优.

**20 【解】**

(1) 由表格中的数据,  $182.4 > 79.2$ , 所以  $\frac{182.4}{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2} > \frac{79.2}{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2}$ ,

所以  $1 - \frac{182.4}{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2} < 1 - \frac{79.2}{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2}$ .

可见模型①的相关指数 $R_1^2$ 小于模型②的相关指数 $R_2^2$ .

所以回归模型②的拟合效果更好.

(2) 由(1)回归模型②的拟合效果更好, 其回归方程为 $\hat{y} = 21.3\sqrt{x} - 14.4$ ,

所以当 $x = 17$ 亿元时, 科技升级直接收益的预测值为

$$\hat{y} = 21.3 \times \sqrt{17} - 14.4 \approx 21.3 \times 4.1 - 14.4 = 72.93 \text{ (亿元)}.$$

当 $x > 17$ 时, 由已知可得 $\bar{x} = \frac{21+22+23+24+25}{5} = 23$ .

$$\bar{y} = \frac{68.5+68+67.5+66+66}{5} = 67.2.$$

所以 $a = \bar{y} + 0.7\bar{x} = 67.2 + 0.7 \times 23 = 83.3$ .

所以当 $x > 17$ 时,  $y$ 与 $x$ 满足的线性回归方程为 $\hat{y} = -0.7x + 83.3$ .

当 $x = 20$ 时, 科技升级直接收益的预测值为 $\hat{y} = -0.7 \times 20 + 83.3 = 69.3$ 亿元.

当 $x = 20$ 亿元时, 实际收益的预测值为 $69.3 + 5 = 74.3$ 亿元  $> 72.93$ 亿元,

所以技术升级投入20亿元时, 公司的实际收益更大.

(3) 因为 $\mu - 2\sigma = 0.50$ ,  $\mu + \sigma = 0.53$ ,

所以 $P(0.50 < X \leq 0.53) = P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + \sigma)$

$= P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu - \sigma) + P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma)$

$$= \frac{0.9545 - 0.6827}{2} + 0.6827 = 0.8186;$$

$$P(X > 0.53) = P(X > \mu + \sigma) = \frac{1 - 0.6827}{2}.$$

所以 $E(Y) = 0 + 2 \times 0.8186 + 4 \times \frac{1 - 0.6827}{2} = 2.2718 \approx 2.27$  (元).

**21 解** (1) 设 $h(x) = f(x) - g(x) - 2 = e^{x-1} - \ln x - 1$ ,  $x > 0$ ,  $h'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$ .

因为 $y = h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数, 且 $h'(1) = 0$ ,

所以 $x \in (0, 1)$ ,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$ 为减函数,

$x \in (1, +\infty)$ ,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$ 为增函数.

所以 $h(x)_{\min} = h(1) = e^0 - \ln 1 - 1 = 0$ ,  $h(x) \geq 0$ , 即证 $f(x) \geq g(x) + 2$ .

(2) 设直线与 $y = f(x)$ 切于 $A(x_1, e^{x_1-1})$ , 与 $y = g(x)$ 切于 $B(x_2, \ln x_2 - 1)$ , ( $x_2 > 0$ ).

$$f'(x) = e^{x-1}, \quad g'(x) = \frac{1}{x}, \quad k = f'(x_1) = e^{x_1-1},$$

所以切线为  $y - e^{x_1-1} = e^{x_1-1}(x - x_1)$ .

因为  $e^{x_1-1} = \frac{1}{x_2}$ , 即  $x_1 - 1 = \ln \frac{1}{x_2} = -\ln x_2$ , 即  $x_1 = 1 - \ln x_2$ .

又因为  $\ln x_2 - 1 - e^{x_1-1} = e^{x_1-1}(x_2 - x_1)$ ,

将  $e^{x_1-1} = \frac{1}{x_2}$ ,  $x_1 = 1 - \ln x_2$  代入  $\ln x_2 - 1 - e^{x_1-1} = e^{x_1-1}(x_2 - x_1)$ ,

得:  $\ln x_2 - 1 - \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_2}(x_2 - 1 + \ln x_2)$ , 整理得  $\ln x_2 - \frac{\ln x_2}{x_2} - 2 = 0$ .

设  $k(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} - 2$ ,  $k'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$ ,

因为  $y = x - 1 + \ln x$  在  $(0, +\infty)$  为增函数, 且  $x = 1$  时,  $y = 0$ ,

所以  $x \in (0, 1)$ ,  $k'(x) < 0$ ,  $h(x)$  为减函数,

$x \in (1, +\infty)$ ,  $k'(x) > 0$ ,  $h(x)$  为增函数.

$k(x)_{\min} = k(1) = -2 < 0$ ,

又因为  $k(e^3) = \ln e^3 - \frac{\ln e^3}{e^3} - 2 = 1 - \frac{3}{e^3} > 0$ ,

$k\left(\frac{1}{e^3}\right) = \ln \frac{1}{e^3} - \frac{\ln \frac{1}{e^3}}{\frac{1}{e^3}} - 2 = 3e^3 - 5 > 0$ ,

所以  $k(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} - 2$  在  $(0, +\infty)$  上有两个零点,

即方程  $\ln x_2 - \frac{\ln x_2}{x_2} - 2 = 0$  有两个根,

所以有两条直线与函数  $y = f(x)$  及  $y = g(x)$  的图象均相切.

22. (1)  $x^2 = 4y$ ; (2)  $\frac{4\sqrt{15}}{15}$ .

【详解】

(1) 由  $\rho \sin^2 \theta + 4 \sin \theta - \rho = 0$  得  $\rho^2 \sin^2 \theta + 4\rho \sin \theta - \rho^2 = 0$ .

于是  $4\rho \sin \theta = (\rho \cos \theta)^2$ ,  $\therefore x^2 = 4y$ ,

所以曲线  $C$  的直角坐标方程为  $x^2 = 4y$ .

(2) 设直线  $l$  的倾斜角为  $\alpha$ , 则  $\tan \alpha = 2$ , 于是  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,

所以直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{5}}{5}t \\ y = 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}t \end{cases}$  ( $t$  为参数).

将  $\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{5}}{5}t \\ y = 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}t \end{cases}$ , 代入  $x^2 = 4y$  得  $t^2 - 6\sqrt{5}t - 15 = 0$ ,

所以  $t_1 + t_2 = 6\sqrt{5}$ ,  $t_1 t_2 = -15$ ,

所以  $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{|PA| + |PB|}{|PA||PB|} = \frac{|t_1 - t_2|}{-t_1 t_2} = \frac{\sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2}}{-t_1 t_2} = \frac{4\sqrt{15}}{15}$ .

23. (1)  $\{x \mid x \geq 4 \text{ 或 } x \leq -2\}$ ; (2) 答案见解析.

【详解】

解：(1) 当  $m=1$  时， $f(x)=|x-3|+|x+1|$ .

当  $x \leq -1$  时， $f(x)=-x+3-x-1=-2x+2 \geq 6 \Rightarrow x \leq -2$ ，所以  $x \leq -2$ ；

当  $-1 < x < 3$  时， $f(x)=-x+3+x+1=4 \geq 6$ ，不成立；

当  $x \geq 3$  时， $f(x)=x-3+x+1=2x-2 \geq 6 \Rightarrow x \geq 4$ ，所以  $x \geq 4$ ，

所以，综上所述可知，所求解集为  $\{x|x \geq 4 \text{ 或 } x \leq -2\}$ .

(2) 要求  $\exists x \in \mathbf{R}$ ，使得  $f(x) < 2m$  时， $m$  的取值范围，

可先求  $\forall x \in \mathbf{R}$ ，使得  $f(x) \geq 2m$  时， $m$  的取值范围，

$\forall x \in \mathbf{R}$ ， $f(x)=|x-3|+|x+m| \geq |x-3-(x+m)|=|-3-m| \geq 2m$ ，

当  $m < 0$  时， $|-3-m| \geq 2m$  恒成立；

当  $m \geq 0$  时， $m \leq 3$ ，

综上所述， $\forall x \in \mathbf{R}$ ，使得  $f(x) \geq 2m$  时， $m$  的取值范围为  $(-\infty, 3]$ ，

故  $\exists x \in \mathbf{R}$ ，使得  $f(x) < 2m$  时， $m$  的取值范围为  $(3, +\infty)$





## 关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办公念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。



微信搜一搜



自主选拔在线