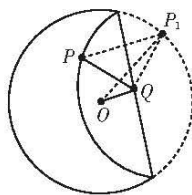


高三年级 2024 年 2 月考试 数学参考答案

1. B $(3+i)(1+2i)=3+6i+i+2i^2=1+7i$.
2. A 因为 $a^2+\frac{1}{a^2+1}=a^2+1+\frac{1}{a^2+1}-1\geq 1$, 当且仅当 $a=0$ 时, 等号成立, 所以 $A=\{x|-4<x<4\}$, $B=\{x|x\geq 1\}$, $A\cap B=[1,4)$.
3. A 若 α 是第二象限角, 则 $\sin \alpha>0$, $\tan \alpha<0$, $\sin \alpha \tan \alpha<0$. 若 $\sin \alpha \tan \alpha<0$, 则 α 是第二象限角或第三象限角. 故选 A.
4. C 若 $\alpha\cap\beta=l, m\subset\alpha, m\perp l$, 则 α 与 β 不一定垂直. A 不正确. 若 $l\perp m, m\parallel\alpha$, 则 l 与 α 的关系不确定. B 不正确. 若 $\alpha\cap\beta=l, m\subset\alpha, l\parallel m$, 则 $m\parallel\beta$. C 正确. 若 $l\subset\alpha, m\subset\beta, \alpha\parallel\beta$, 则 $l\parallel m$ 或 l, m 异面. D 不正确.
5. C 由 $e_1^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}=3$, 得 $e_2^2=\frac{a^2+b^2}{b^2}=\frac{3}{2}$, 则 $e_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$.
6. D 如图, 设 P 关于 l 对称的点为 P_1 , 则 P_1 在圆 O 上, 连接 P_1Q, OP_1 , 则有 $|PQ|=|QP_1|$, 故 $|QP|+|QO|=|QP_1|+|QO|\geq|OP_1|=2$.
7. D (法一) 因为 $\vec{AB}=(3,5), \vec{AC}=(1,7)$, 所以 $\vec{BC}=\vec{AC}-\vec{AB}=(-2,2)$. 又 AD 为 BC 边上的高, 所以 $\begin{cases} \vec{AD}\cdot\vec{BC}=0, \\ \vec{AD}=\lambda\vec{AB}+(1-\lambda)\vec{AC}. \end{cases}$ 设 $\vec{AD}=(x,y)$, 则 $\begin{cases} -2x+2y=0, \\ x=3\lambda+1-\lambda, \\ y=5\lambda+7(1-\lambda), \end{cases}$ 解得 $x=y=4$, 所以 $\vec{AD}=(4,4)$.
- (法二) $\vec{BC}=\vec{AC}-\vec{AB}=(-2,2)$, 设 $\vec{BD}=\lambda\vec{BC}$, 则 $\vec{AD}\cdot\vec{BC}=(\vec{AB}+\lambda\vec{BC})\cdot\vec{BC}=\vec{AB}\cdot\vec{BC}+\lambda\vec{BC}^2=-6+10+8\lambda=0$, 解得 $\lambda=-\frac{1}{2}$, 则 $\vec{AD}=\vec{AB}-\frac{1}{2}\vec{BC}=(4,4)$.
8. B 令 $f(x)=\sin x+2^x, g(x)=\sin x+3^x$, 当 $x>0$ 时, $g(x)>f(x)>0$, 当 $x<0$ 时, $g(x)<f(x)<2$. 易知 $f(x), g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上均单调递增, 由 $\sin a+2^a=\sin b+3^b=2$, 得 $0<b<a<1$, 则 $a^b>b^b>b^a$, 故 $\lg a^b>\lg b^b>\lg b^a$, 即 $b\lg a>b\lg b>a\lg b$.
9. AD $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\sqrt{3}\cos x$, 则 $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=k\pi, k\in\mathbf{Z}$. 故选 AD.
10. ABC 由 $(0.004+a+0.018+0.022+0.028+0.022)\times 10=1$, 解得 $a=0.006$. A 正确. $m=\frac{8}{0.004\times 10}=200$. B 正确. 评分数的平均数为 $45\times 0.04+55\times 0.06+65\times 0.22+75\times 0.28+85\times 0.22+95\times 0.18=76.2$. C 正确. 因为 $0.04+0.06+0.22=0.32>0.25$, 所以甲不会被邀请参与产品改进会议. D 不正确.
11. BC 若平面 $\triangle ABC$ 是面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$ 的等边三角形, 则 $AB=BC=AC=R$, 则 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$, a



$=b=c=\frac{\pi}{3}R$. A 不正确. 若 $a^2+b^2=c^2$, 则 $(\alpha R)^2+(\beta R)^2=(\gamma R)^2$, 则 $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$. B 正确. 若

$a=b=c=\frac{\pi}{3}R$, 则 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$, $AB=BC=AC=R$, 则平面 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$, 则 O 到

平面 ABC 的距离 $h=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}R$, 则三棱锥 $O-ABC$ 的体积 $V_{O-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=$

$\frac{\sqrt{2}}{12}R^3$, 则球面 $O-ABC$ 的体积 $V>V_{O-ABC}=\frac{\sqrt{2}}{12}R^3$. C 正确. 由余弦定理可知

$$\begin{cases} BC^2=2R^2-2R^2\cos\alpha, \\ AC^2=2R^2-2R^2\cos\beta, \text{ 因为 } C=\frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } BC^2+AC^2=AB^2, \text{ 则 } \cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=1. \text{ 取 } \alpha \\ AB^2=2R^2-2R^2\cos\gamma, \end{cases}$$

$=\beta=\frac{\pi}{3}, \gamma=\frac{\pi}{2}$, 则 $a=b=\frac{\pi}{3}R, c=\frac{\pi}{2}R$, 则 $a^2+b^2=\frac{2\pi^2}{9}R^2<\frac{\pi^2}{4}R^2=c^2$. D 不正确.

12. ABD 由 $f(x-1)-f(1-x)=2x-2$, 可得 $f(x)-f(-x)=2x$, 则 $f'(x)+f'(-x)=2$, 令 $x=0$, 得 $f'(0)=1$. A 正确. 令 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(-x)=f(-x)+x=f(x)-x=g(x)$, 故 $y=f(x)-x$ 为偶函数. B 正确. 假设 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称, 则 $f(x-1)+f(1-x)=0$, 则 $f'(x-1)-f'(1-x)=0$, 即 $f'(x)-f'(-x)=0$, 则 $f'(x)=1$, 这与 $f'(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称矛盾, 假设不成立. C 不正确. 因为 $f'(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称, 所以 $f'(1+x)+f'(1-x)=0$, 令 $h(x)=f(1+x)-f(1-x)$, 则 $h'(x)=f'(1+x)+f'(1-x)=0$, 则 $h(x)=f(1+x)-f(1-x)=C$ (C 为常数), 则 $f(x-1)-f(x+1)=2x-2-C$, 从而 $f'(x-1)-f'(x+1)=2$, 即 $f'(x+2)=f'(x)-2$, 由 $f'(0)=1$, 得 $f'(2024)=-2023$. D 正确.

13. 1 抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的准线方程为 $y=-1$, 顶点到它准线的距离为 1.

14. $\frac{1}{e}$ 因为 $f(x)=ax-\ln x$, 所以 $f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$. 若 $a\leq 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 无最小值. 若 $a>0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\min}=f(\frac{1}{a})=1+\ln a=0$, 解得 $a=\frac{1}{e}$.

15. 31 $S_4-S_2=a_3+a_4=12, a_2a_5=a_3a_4=32$, 因为 $\{a_n\}$ 单调递增, 所以 $a_3=4, a_4=8$, 则 $S_5=31$.

16. 60480 第 3 行, $c=9$, 可选的位置有 3 个, 其余 2 个位置任取 2 个数, 共有 $C_3^2 A_2^2$ 种情况. 第 2 行, 取剩下 6 个数中最大的数为 b , 可选的位置有 3 个, 其余 2 个位置任取 2 个数, 共有 $C_3^2 A_2^2$ 种情况, 第 1 行, 剩下 3 个数任意排列, 则有 A_3^3 种情况, 故共有 $C_3^2 A_2^2 C_3^2 A_2^2 A_3^3 = 60480$ 种填法.

17. 解: (1) 因为 $a(\cos B-2)+b\cos A=0$, 所以 $\sin A(\cos B-2)+\sin B\cos A=0, \dots\dots\dots 1$ 分
则 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin A. \dots\dots\dots 2$ 分
又 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$, 所以 $\sin C=2\sin A, \dots\dots\dots 4$ 分
则 $c=2a$, 即 $\frac{a}{c}=\frac{1}{2}. \dots\dots\dots 5$ 分

(2)由(1)可知, $\sin C=2\sin A=1$, 则 $C=\frac{\pi}{2}$, 则 $B=\pi-A-C=\frac{\pi}{3}$ 7分

$c=2a=6$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 3\times 6\times \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ 10分

18. (1)证明: 连接 AC , 因为 $AD\perp CD$, $AD=1$, $CD=\sqrt{3}$, 所以 $AC=2$, $\angle ACD=30^\circ$ 1分

由 $AD\parallel BC$, 得 $\angle ACB=60^\circ$, 则 $AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cos \angle ACB=12$, 2分

则 $AB^2+AC^2=BC^2$, 从而 $AB\perp AC$ 3分

又 $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $AB\subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA\perp AB$ 4分

因为 $AC\cap PA=A$, 所以 $AB\perp$ 平面 PAC 5分

又 $PC\subset$ 平面 PAC , 所以 $AB\perp PC$ 6分

(2)解: 以 A 为坐标原点, AD, AP 所在的直线分别为 y 轴, z

轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $P(0, 0, 1)$, $B(\sqrt{3},$

$-3, 0)$, $C(\sqrt{3}, 1, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $\vec{PB}=(\sqrt{3}, -3, -1)$, $\vec{PC}=($

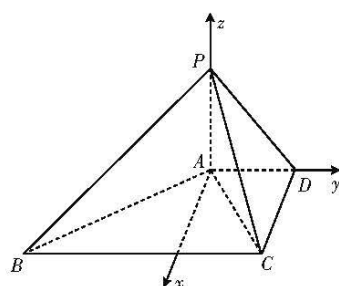
$\sqrt{3}, 1, -1)$, $\vec{PD}=(0, 1, -1)$ 8分

设平面 PBC 的法向量为 $m=(x, y, z)$, 由 $\begin{cases} m\cdot \vec{PB}=0, \\ m\cdot \vec{PC}=0, \end{cases}$ 得

$\begin{cases} \sqrt{3}x-3y-z=0, \\ \sqrt{3}x+y-z=0, \end{cases}$ 令 $x=1$, 得 $m=(1, 0, \sqrt{3})$ 9分

$\cos\langle m, \vec{PD}\rangle=\frac{m\cdot \vec{PD}}{|m|\cdot |\vec{PD}|}=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$, 10分

故直线 PD 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 12分



19. 解: (1)当 $n=1$ 时, $a_1=4a_2$, 则 $a_2=\frac{1}{4}$ 1分

当 $n\geq 2$ 时, 由 $a_1+2a_2+2^2a_3+\dots+2^{n-1}a_n=2^{n+1}a_{n+1}$, 得 $a_1+2a_2+2^2a_3+\dots+2^{n-2}a_{n-1}=$

$2^n a_n$, 则 $2^{n-1}a_n=2^{n+1}a_{n+1}-2^n a_n$, 则 $a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n$ 3分

因为 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{4}\neq \frac{3}{4}$, 所以 $\{a_n\}$ 从第 2 项起成等比数列, 4分

则 $a_n=\begin{cases} 1, n=1, \\ \frac{1}{4}\times(\frac{3}{4})^{n-2}, n\geq 2. \end{cases}$ 5分

(2) $b_1=\log_3 a_1=0$, 当 n 为大于 1 的奇数时, $b_n=\log_3 [4^{n-1}\times\frac{1}{4}\times(\frac{3}{4})^{n-2}]=n-2$, 6分

当 n 为偶数时, $b_n=\frac{n\times 3^n}{a_{n+1}}=3n\times 4^n$ 7分

$W=b_1+b_3+b_5+\dots+b_{2n-1}=0+1+3+\dots+2n-3=\frac{(1+2n-3)(n-1)}{2}=(n-1)^2$ 8分

$$T = b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{2n} = 6 \times 4^2 + 12 \times 4^4 + 18 \times 4^6 + \dots + 6n \times 4^{2n},$$

$$\text{则 } 16T = 6 \times 4^4 + 12 \times 4^6 + 18 \times 4^8 + \dots + 6n \times 4^{2n+2}, \dots \dots \dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{则 } -15T = 6 \times (4^2 + 4^4 + 4^6 + \dots + 4^{2n}) - 6n \times 4^{2n+2} = 6 \times \frac{4^2 - 4^{2n+2}}{1 - 4^2} - 6n \times 4^{2n+2} =$$

$$\frac{(2 - 30n) \times 4^{2n+2} - 32}{5}, \dots \dots \dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{则 } T = \frac{(30n - 2) \times 4^{2n+2} + 32}{75}, \dots \dots \dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{则 } S_{2n} = W + T = \frac{(30n - 2) \times 4^{2n+2} + 32}{75} + (n - 1)^2. \dots \dots \dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) 若学生甲第 1 题选择 B 种试题作答并且答对, 则第 2 题选择 B 种试题作答的概率 $P_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$, $\dots \dots \dots 2 \text{ 分}$

若学生甲第 1 题选择 B 种试题作答并且答错, 则第 2 题选择 B 种试题作答的概率 $P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$, $\dots \dots \dots 4 \text{ 分}$

故学生甲 2 题均选择 B 种试题作答的概率 $P = \frac{2}{9} + \frac{1}{24} = \frac{19}{72}$. $\dots \dots \dots 5 \text{ 分}$

(2) 由题可知, X 的取值可能为 0, 1, 2, $\dots \dots \dots 6 \text{ 分}$

且 $P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{16}$, $\dots \dots \dots 7 \text{ 分}$

$P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{77}{144}$, $\dots \dots \dots 8 \text{ 分}$

$P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{18}$, $\dots \dots \dots 9 \text{ 分}$

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{3}{16}$	$\frac{77}{144}$	$\frac{5}{18}$

$\dots \dots \dots 10 \text{ 分}$

则 $E(X) = 0 \times \frac{3}{16} + 1 \times \frac{77}{144} + 2 \times \frac{5}{18} = \frac{157}{144}$. $\dots \dots \dots 12 \text{ 分}$

21. 解: (1) 因为 $\angle PA_1A_2 = 30^\circ$, 所以 $\frac{|A_1O|}{|PA_1|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $|PA_1| = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$. $\dots \dots \dots 1 \text{ 分}$

又 $\triangle PA_1A_2$ 的周长为 $4 + 2\sqrt{3}$, 所以 $2(a + \frac{2\sqrt{3}a}{3}) = 4 + 2\sqrt{3}$, 解得 $a = \sqrt{3}$, $\dots \dots \dots 3 \text{ 分}$

则 $b^2 = |PA_1|^2 - a^2 = 1$, 故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$. $\dots \dots \dots 4 \text{ 分}$

(2) 设直线 l 的方程为 $y = \frac{1}{2}x + m$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

联立方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1, \\ y = \frac{1}{2}x + m, \end{cases}$ 整理得 $7x^2 + 12mx + 12m^2 - 12 = 0$, 5分

$\Delta = 144m^2 - 336m^2 + 336 = 336 - 192m^2 > 0, x_1 + x_2 = -\frac{12m}{7}, x_1x_2 = \frac{12m^2 - 12}{7}$ 6分

$\frac{k_1 + k_2}{1 - \lambda k_1 k_2} = \frac{\frac{y_1 + y_2}{x_1 x_2}}{1 - \frac{\lambda y_1 y_2}{x_1 x_2}} = \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{x_1 x_2 - \lambda y_1 y_2} = \frac{4x_1 x_2 + 4m(x_1 + x_2)}{(4 - \lambda)x_1 x_2 - 2\lambda m(x_1 + x_2) - 4\lambda m^2}$ 8分

$= \frac{-48}{(4 - \lambda)(12m^2 - 12) + 24\lambda m^2 - 28\lambda m^2} = \frac{-48}{(48 - 16\lambda)m^2 + 12\lambda - 48}$ 10分

令 $48 - 16\lambda = 0$, 即 $\lambda = 3$, 则 $\frac{k_1 + k_2}{1 - \lambda k_1 k_2} = 4$, 为定值. 11分

故存在 $\lambda = 3$, 使得 $\frac{k_1 + k_2}{1 - \lambda k_1 k_2}$ 为定值. 12分

22. (1)解: 由 $a = 2$, 得 $f(x) = (x + 2) \ln x - x^2 - x$, 则 $f'(x) = \ln x + \frac{2}{x} - 2x$, 1分

则 $f(1) = -2, f'(1) = 0$, 2分

故曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y + 2 = 0$ 4分

(2)证明: $f'(x) = \ln x + \frac{a}{x} - ax$, 令 $g(x) = \ln x + \frac{a}{x} - ax$, 则 $g'(x) = \frac{-ax^2 + x - a}{x^2}$

..... 5分

因为 $0 < a < \frac{1}{2}$, 所以 $1 - 4a^2 > 0$, 则方程 $-ax^2 + x - a = 0$ 存在两个不同的实数根 m, n (设 $m < n$), 则 $m + n = \frac{1}{a} > 0, mn = 1$, 则 $0 < m < 1 < n$ 6分

当 $x \in (0, m) \cup (n, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in (m, n)$ 时, $g'(x) > 0$, 则 $f'(x) = g(x)$ 在 $(0, m)$ 和 $(n, +\infty)$ 上单调递减, 在 (m, n) 上单调递增. 7分

$f'(1) = 0, f'(a^2) = 2 \ln a + \frac{1}{a} - a^3, f'(\frac{1}{a^2}) = -2 \ln a + a^3 - \frac{1}{a} = -f'(a^2)$, 8分

令 $h(x) = 2 \ln x + \frac{1}{x} - x^3 (0 < x < \frac{1}{2})$, 则 $h'(x) = \frac{-3x^4 + 2x - 1}{x^2} < 0$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上恒成立, 故 $h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 故 $h(x) > h(\frac{1}{2}) = \frac{15}{8} - 2 \ln 2 > 0$, 则 $f'(a^2) > 0, f'(\frac{1}{a^2}) < 0$, ...

..... 9分

不妨令 $x_1 < x_2 < x_3$, 则 $x_1 \in (a^2, m), x_2 = 1, x_3 \in (n, \frac{1}{a^2}), f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0$, 当 $x \in (0, x_1) \cup (x_2, x_3)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (x_1, x_2) \cup (x_3, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 和 (x_2, x_3) 上单调递增, 在 (x_1, x_2) 和 $(x_3, +\infty)$ 上单调递减, 从而 $f(x)$ 恰有三个极值点 x_1, x_2, x_3 10分

由 $f'(\frac{1}{x}) + f'(x) = 0, f'(x_1) + f'(x_3) = 0$, 得 $x_1 x_3 = 1$, 所以 $x_1 x_2 x_3 = x_1 x_3 = 1$ 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

