2024年1月“七省联考”押题预测卷04

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $P=\{1,2,3,4,5\}$，$Q=\{x|(x-1)(x-3)\le 0\}$，则 $P\cap Q=$（　　）

A. $\{2\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{1,2,3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

【答案】B

【解析】因为 $P=\{1,2,3,4,5\}$，$Q=\{x|(x-1)(x-3)\le 0\}=\{x|1\le x\le 3\}$，故 $P\cap Q=\{1,2,3\}$.

故选：B

2．设复数 z 在复平面内对应的点在第二象限，则复数 $z(1+\mathrm{i})^{12}$ 在复平面内对应的点在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】D

【解析】设 $z=a+b\mathrm{i}$，其中 $a<0,b>0$，

$z(1+\mathrm{i})^{12}=(a+b\mathrm{i})\left[(1+\mathrm{i})^2\right]^6$

$=(a+b\mathrm{i})(2\mathrm{i})^6=(a+b\mathrm{i})\times(-64)$

$=-64a-64b\mathrm{i}$，

其中 $-64a>0,-64b<0$，

所以复数 $z(1+\mathrm{i})^{12}$ 在复平面内对应的点在第四象限.

故选：D

3．已知 $\vec{a}=(m,-2)$，$\vec{b}=(3,4)$，若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，则 $\left|\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}\right|=$（　　）

A. 20　　B. 15　　C. 10　　D. 5

【答案】C

【解析】因为 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，所以：$4m-(-2)\times 3=0\Rightarrow m=-\frac{3}{2}$.

所以：$\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}=\left(-\frac{3}{2},-2\right)-\frac{3}{2}(3,4)=(-6,-8)$

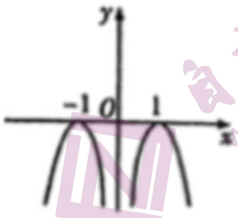
所以：$\left|\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}\right|=|(-6,-8)|=10$.

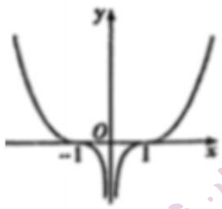
故选：C

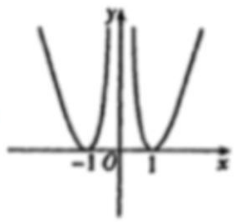
4．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，满足 $f(|x|)=f(x)$．当 $x<0$ 时 $f(x)=\left(\frac{1}{x}-x\right)\ln x^2$，

则 $f\left(x\right)$ 的大致图象为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】D

【解析】因为函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$，满足 $f\left(\left|x\right|\right)=f\left(x\right)$，

所以 $f\left(x\right)$ 是偶函数，所以 $f\left(x\right)$ 的图象关于 y 轴对称，故排除 A；

当 $-1<x<0$ 时，$\dfrac{1}{x}-x<0,\ln x^2<0$，所以 $f\left(x\right)=\left(\dfrac{1}{x}-x\right)\ln x^2>0$，故排除 B，C.

故选:D

5．已知 O 为坐标原点，点 A 在 x 轴正半轴上，点 P 在第一象限，且 $\angle AOP=\alpha$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，点 Q 在第四象限，且 $\angle AOQ=\beta$，α，$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$OP\perp OQ$，则 $\sin(\alpha-\beta)=$（　　）

A. $-\dfrac{7}{25}$　　　　B. $\dfrac{7}{25}$　　　　C. $-\dfrac{24}{25}$　　　　D. $\dfrac{24}{25}$

【答案】B

【解析】因为 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，且 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$.

又 α，$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $OP\perp OQ$，所以 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\sin\beta=\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$.

所以 $\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{7}{25}$.

故选：B

6．已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，$A(-1,0)$，点 P 是抛物线上的动点，则当 $\dfrac{|PF|}{|PA|}$ 的值最小时，$|PF|=$

（　　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. $2\sqrt{2}$　　　　D. 4

【答案】B

【解析】由题知，抛物线的准线方程为 $x=-1$，$A(-1,0)$，过 P 作 PQ 垂直于准线于 Q，连接 PA，由抛物线定义知 $|PQ|=|PF|$.

$\therefore \dfrac{|PF|}{|PA|}=\dfrac{|PQ|}{|PA|}=\sin\angle PAQ$

由正弦函数知，要使 $\dfrac{|PF|}{|PA|}$ 最小值，即 $\angle PAQ$ 最小，即 $\angle PAF$ 最大，即直线 PA 斜率最大，即直线 PA 与抛物线相切.

设 PA 所在的直线方程为：$y=k(x+1)$，联立抛物线方程：

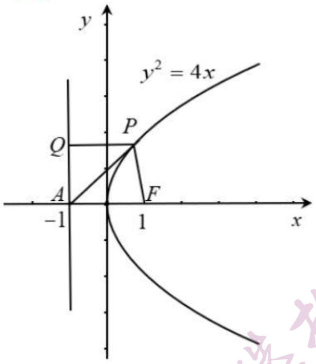
$\begin{cases} y^2=4x \\ y=k(x+1) \end{cases}$，整理得：$k^2x^2+(2k^2-4)x+k^2=0$

则 $\Delta=\left(2k^2-4\right)^2-4k^4=0$，解得 $k=\pm1$.

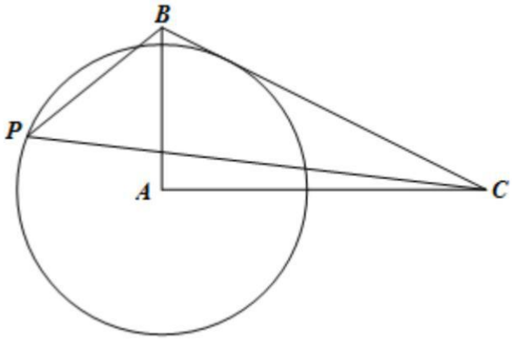
即 $x^2-2x+1=0$，解得 $x=1$，代入 $y^2=4x$ 得 $y=\pm2$.

$\therefore P(1,2)$ 或 $P(1,-2)$，再利用焦半径公式得 $|PF|=2$

故选：B.



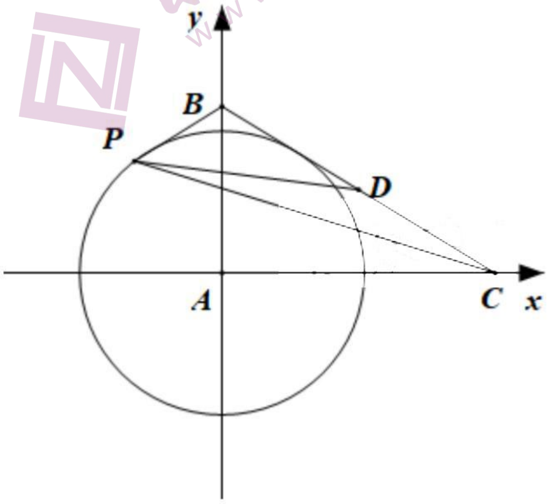
7．已知直角三角形 ABC 中，$\angle A=90°$，AB=2，AC=4，点 P 在以 A 为圆心且与边 BC 相切的圆上，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最大值为（　　）



A. $\dfrac{16+16\sqrt{5}}{5}$　　B. $\dfrac{16+8\sqrt{5}}{5}$　　C. $\dfrac{16}{5}$　　D. $\dfrac{56}{5}$

【答案】D

【解析】以 A 为原点建系，$B(0,2),C(4,0)$，



$BC:\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$，即 $x+2y-4=0$，故圆的半径为 $r=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$，

∴圆 $A:x^2+y^2=\dfrac{16}{5}$，设 BC 中点为 $D(2,1)$，

$\overrightarrow{PB}\bullet\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}^2-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2=\left|\overrightarrow{PD}\right|^2-\dfrac{1}{4}\times 20=\left|\overrightarrow{PD}\right|^2-5$，

$|PD|_{\max}=|AD|+r=\sqrt{5}+\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$，$\therefore\left(\overrightarrow{PB}\bullet\overrightarrow{PC}\right)_{\max}=\dfrac{81}{5}-5=\dfrac{56}{5}$，

故选：D.

8．设函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-4x+a\ln x$，若函数 $y=f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，且不等式

$f(x_1)+f(x_2)\geq x_1+x_2+t$ 恒成立，则 t 的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(-\infty,-16-8\ln 2]$　　C. $\left(-\infty,\dfrac{e^2}{2}-4e\right]$　　D. $(-\infty,-13]$

【答案】D

【解析】函数 $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=x-4+\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2-4x+a}{x},x>0$，

又函数 $y=f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，

所以方程 $x^2-4x+a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不相等的正实数根，

则 $\begin{cases}\Delta=16-4a>0\\ x_1+x_2=4>0\\ x_1x_2=a>0\end{cases}$，解得 $0<a<4$，

又 $f(x_1)+f(x_2)-(x_1+x_2)=\dfrac{1}{2}x_1^2-4x_1+a\ln x_1+\dfrac{1}{2}x_2^2-4x_2+a\ln x_2-x_1-x_2$

$=\dfrac{1}{2}\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]-5(x_1+x_2)+a\ln(x_1x_2)=\dfrac{1}{2}[16-2a]-20+a\ln a=a\ln a-a-12$

设 $h(a)=a\ln a-a-12,0<a<4$，

则 $h'(a)=\ln a$，

当 $0<a<1$ 时，$h'(a)<0$，$h(a)$ 单调递减，

当 $1<a<4$ 时，$h'(a)>0$，$h(a)$ 单调递增加，

$h(a)_{\min}=h(1)=-13$

因为不等式 $f(x_1)+f(x_2)\geq x_1+x_2+t$ 恒成立，

即 $f(x_1)+f(x_2)-(x_1+x_2)\geq t$ 恒成立，

所以 $t\leq -13$.

故选：D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．已知一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为不全相等的 n 个正数，其中 $n\geq 4$，若由 $y_k=3x_k-2(k=1,2,\cdots,n)$ 生成一组新的数据 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，则这组新数据与原数据中可能相等的量有（　　）

A. 极差　　B. 平均数　　C. 中位数　　D. 标准差

【答案】BC

【解析】对于 A，因为样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为不全相等的 n 个正数，所以极差大于 0，

所以由 $y_k=3x_k-2\left(k=1,2,\cdots,n\right)$ 生成一组新的 y_i 的极差是 x_i 极差的 3 倍，故 A 错误；

对于 B，设 $\overline{x}$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数，$\overline{y}$ 为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的平均数，可得 $\overline{y}=3\overline{x}-2$，

当 $\overline{x}=1$ 时，可得 $\overline{y}=1$，故 B 正确；

对于 C，当 n 为正奇数时，设样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的中位数为 x_k，

则数据 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的中位数 $y_k=3x_k-2$，当 $x_k=1$ 时，$y_k=3x_k-2=1$，故 C 正确；

对于 D，s_1 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的标准差，因为样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为不全相等的 n 个正数，

所以 $s_1\neq 0$，设 s_2 为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的标准差，可得 $\overline{y}=3\overline{x}-2$，

则 $s_1=\sqrt{\dfrac{\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2}{n}}$，

$s_2=\sqrt{\dfrac{\left(y_1-\overline{y}\right)^2+\left(y_2-\overline{y}\right)^2+\cdots+\left(y_n-\overline{y}\right)^2}{n}}=\sqrt{\dfrac{9\left(x_1-\overline{x}\right)^2+9\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+9\left(x_n-\overline{x}\right)^2}{n}}=3s_1$，故 D 错误.

故选：BC.

10．在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，P 在底面上的射影 E 在线段 BD 上，则（　）

A. $PA=PC$

B. $PB=PD$

C. $AC\perp$ 平面 PBD

D. $BD\perp$ 平面 PAC

【答案】AC

【解析】A 选项，由题意得 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是菱形，

连接 AC 与 BD 交于点 H，则 $AH=CH$，$EH\perp AC$，

因为 $AE=EC$，故 $AE=EC$，

又 $PA=\sqrt{PE^2+AE^2},PC=\sqrt{PE^2+CE^2}$，故 $PA=PC$，A 正确；

B 选项，因为 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PD=\sqrt{PE^2+ED^2},PB=\sqrt{PE^2+EB^2}$，

由于 ED 与 EB 不一定相等，故 PB,PD 不一定相等，B 错误；

C 选项，因为底面 $ABCD$ 是菱形，所以 $AC\perp BD$，

又 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PE\perp AC$，

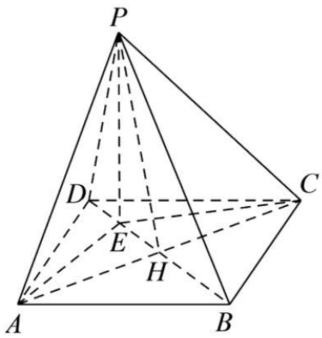
因为 $PE\cap BD=E$，$PE,BD\subset$ 平面 PBD，

所以 $AC\perp$ 平面 PBD，C 正确；

D 选项，连接 PH，若 E,H 不重合，此时 $\mathrm{Rt}\triangle PEH$ 中，PH 为斜边，

故 PH 与 EH 不垂直，

故 BD 与 PH 不垂直，故此时 BD 与平面 PAC 不垂直，D 错误.



故选：AC

11．已知双曲线C：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$的左、右焦点分别为F_1，F_2，右顶点为E，过F_2的直线交双曲线C的右支于A，B两点（其中点A在第一象限内），设M，N分别为$\triangle AF_1F_2$，$\triangle BF_1F_2$的内心，则（　　）

A. 点M的横坐标为2

B. 当$F_1A\perp AB$时，$|AF_1|=1+\sqrt{7}$

C. 当$F_1A\perp AB$时，$\triangle ABF_1$内切圆的半径为$-1+\sqrt{7}$

D. $|ME||NE|=1$

【答案】BCD

【解析】由双曲线方程知：$a=1,b=\sqrt{3},c=2$，令圆M在x轴上的切点横坐标为x_1，

结合双曲线定义及圆切线性质有$|AF_1|-|AF_2|=(x_1+c)-(c-x_1)=2a$，即$x_1=a=1$，

所以圆M在x轴上的切点与右顶点为E重合，又$ME\perp x$轴，则M的横坐标为1，A错；

由$F_1A\perp AB$，则$|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2=16$，故$(|AF_1|-|AF_2|)^2+2|AF_1||AF_2|=16$，

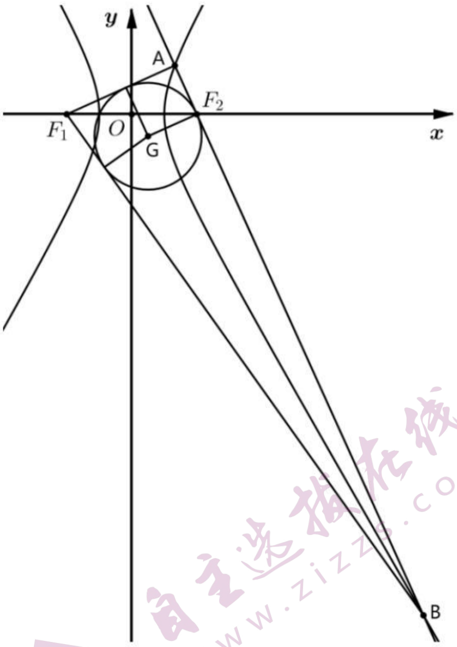
而$|AF_1|-|AF_2|=2$，所以$|AF_1||AF_2|=6$，故$|AF_2|^2+2|AF_2|-6=0$，得$|AF_2|=\sqrt{7}-1$，

所以$|AF_1|=\sqrt{7}+1$，B对；

若G为$\triangle ABF_1$内切圆圆心且$F_1A\perp AB$知：以直角边切点和G,A为顶点的四边形为正方形，

结合双曲线定义：内切圆半径$r=\frac{1}{2}(|AF_1|+|AB|-|BF_1|)=\frac{1}{2}(|AF_1|+|AF_2|+|BF_2|-|BF_1|)$

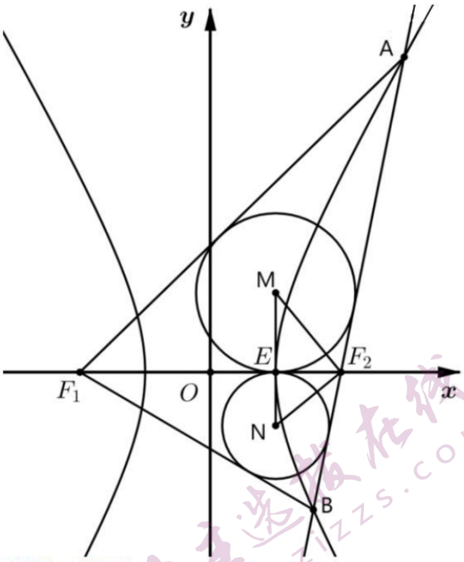
由B分析知：$r=\frac{1}{2}(2\sqrt{7}+|BF_2|-|BF_1|)=\frac{1}{2}(2\sqrt{7}-2)=\sqrt{7}-1$，C对；



由 MF_2, NF_2 分别是 $\angle EF_2A, \angle EF_2B$ 的角平分线，又 $\angle EF_2A+\angle EF_2B=\pi$，

所以 $\angle MF_2N=\dfrac{\pi}{2}$，结合 A 分析易知 $MN\perp EF_2$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle MF_2N$ 中 $|EF_2|^2=|ME||NE|=(c-a)^2=1$，D 对.



故选：BCD

12．投掷一枚质地不均匀的硬币，已知出现正面向上的概率为 p，记 A_n 表示事件“在 n 次投掷中，硬币正面向上出现偶数次”，则下列结论正确的是（　　）

A. A_2 与 $\overline{A_2}$ 是互斥事件

B. $P\left(A_2\right)=p^2$

C. $P\left(A_{n+1}\right)=(1-2p)P\left(A_n\right)+p$

D. $P\left(A_{2n}\right)>P\left(A_{2n+2}\right)$

【答案】ACD

【解析】对 A，因为对立事件是互斥事件，所以 A 正确；

对 B，$P\left(A_2\right)=p^2+(1-p)^2=2p^2-2p+1$，所以 B 错；

对 C，由全概率公式可知

$$P\left(A_{n+1}\right)=P\left(A_{n+1}\mid A_n\right)\cdot P\left(A_n\right)+P\left(A_{n+1}\mid \overline{A_n}\right)\cdot P\left(\overline{A_n}\right)=(1-p)P\left(A_n\right)+p\left(1-P\left(A_n\right)\right)$$

$=(1-2p)P\left(A_n\right)+p$，所以 C 正确；

对 D，由 C 可知 $P\left(A_{n+1}\right)-\frac{1}{2}=(1-2p)\left(P\left(A_n\right)-\frac{1}{2}\right)$，

因为 $P\left(A_1\right)-\frac{1}{2}=1-p-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-p\neq 0$，

所以 $\left\{P\left(A_n\right)-\frac{1}{2}\right\}$ 是以 $\frac{1}{2}-p$ 为首项，$1-2p$ 为公比的等比数列，

所以 $P\left(A_n\right)-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}-p\right)(1-2p)^{n-1}=\frac{1}{2}(1-2p)^n$，

所以 $P\left(A_n\right)=\frac{1}{2}(1-2p)^n+\frac{1}{2}$，

所以 $P\left(A_{2n}\right)=\frac{1}{2}(1-2p)^{2n}+\frac{1}{2}$，因为 $0<p<1$ 且 $p\neq\frac{1}{2}$，

所以 $1-2p\in(-1,0)\cup(0,1)$，所以 $(1-2p)^2\in(0,1)$，

所以 $P\left(A_{2n}\right)=\frac{1}{2}(1-2p)^{2n}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left[(1-2p)^2\right]^n+\frac{1}{2}$ 是关于 n 的递减数列，

所以 $P\left(A_{2n}\right)>P\left(A_{2n+2}\right)$，D 正确.

故选：ACD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．将函数 $f(x)=\sin x$ 图象上每一点的横坐标缩短为原来的一半，纵坐标不变，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)=$______.

【答案】$\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

【解析】将函数 $f(x)=\sin x$ 图象上每一点的横坐标缩短为原来的一半，纵坐标不变，

得到 $y=\sin 2x$，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，

则 $g(x)=\sin 2(x-\frac{\pi}{6})=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，

故答案为：$\sin(2x-\frac{\pi}{3})$．

14. 某医院安排王医生、李医生、赵医生、张医生、孙医生 5 人到三个社区开展主题为“提高免疫力，预防传染病”的知识宣传活动，要求每人只能参加一个社区的活动，每个社区必须有人宣传，若李医生、张医生不安排在同一个社区，孙医生不单独安排在一个社区，则不同的安排方法有______种．

【答案】90

【解析】由题意知可分为两类：

第一类：一个社区 3 人，剩下两个社区各 1 人，

当李医生、张医生 2 人都单独安排到一个社区时，有 $A_3^3=6$ 种不同的安排方法；

当李医生、张医生中有 1 人单独安排到一个社区时，有 $C_2^1C_2^1A_3^3=24$ 种不同的安排方法；

第二类：一个社区 1 人，剩下两个社区各 2 人，

当李医生、张医生中有 1 人单独安排到一个社区时，有 $C_2^1C_3^1A_3^3=36$ 种不同的安排方法；

当李医生、张医生都不单独安排到一个社区时，有 $C_2^1C_2^1A_3^3=24$ 种不同的安排方法；

综上可知，共有 $6+24+36+24=90$（种），

故答案为：90

15. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_5=5$，$\{b_n\}$ 是等比数列，满足 $a_nb_n=(n+1)2^n$，则 $S_n=$_______.

【答案】$\frac{n(n+3)}{8}$

【解析】设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，

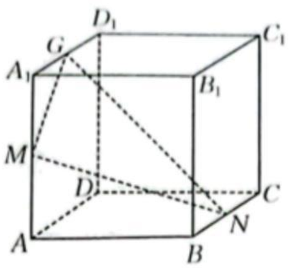
$\{b_n\}$ 为等比数列，$\{a_n\}$ 为等差数列，$a_nb_n=(n+1)2^n$，则 $\{b_n\}$ 的等比数列 $q=2$，

$S_5=5a_3=5$，$\therefore a_3=1$，则 $b_3=4\times 8=32$，$\therefore b_1=8$，$b_n=8\cdot 2^{n-1}=4\cdot 2^n$，

$a_nb_n=a_n\cdot 4\cdot 2^n=(n+1)2^n$，$\therefore a_n=\frac{n+1}{4}$，$S_n=\frac{n\left(\frac{2}{4}+\frac{n+1}{4}\right)}{2}=\frac{n(n+3)}{8}$.

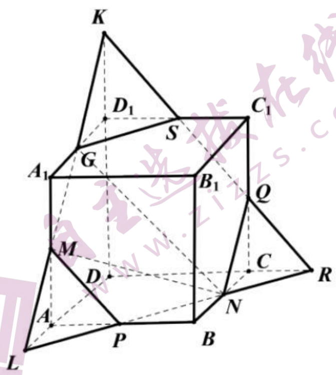
故答案为：$\frac{n(n+3)}{8}$

16．如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，M，N，G 分别是棱 AA_1，BC，A_1D_1 的中点，平面 MGN 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面面积为_______.



【答案】$12\sqrt{3}$

【解析】



在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

延长 GM 交 DA 延长线于 L，连接 LN 交 AB 于 P，并延长交 DC 延长线于 R，

延长 MG 交 DD_1 延长线于 K，连接 KR 交 D_1C_1 于 S，交 CC_1 于 Q，

易知点 L,R,K 共面，平面 MNG 即为平面 LRK，

所以平面 MGN 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面为六边形 $PNQSGM$，

因为 M，N，G 分别是棱 AA_1，BC，A_1D_1 的中点，

所以根据相似比易知点 P,Q,S,G 都为其所在正方体棱的中点，则易得六边形 $PNQSGM$ 为正六边形，

因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，

所以正六边形 $PNQSGM$ 的边长 $MN=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

所以截面面积为 $6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(2\sqrt{2}\right)^2=12\sqrt{3}$.

故答案为：$12\sqrt{3}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，前 n 项和为S_n，若$a_{n+1}+a_{n+2}=12a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，$S_5=121$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=a_n+\ln a_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和T_n．

【答案】（1）$a_n=3^{n-1}$　　（2）$T_n=\dfrac{3^n-1+(n-1)n\ln 3}{2}$

【解析】（1）设$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，

因为$a_{n+1}+a_{n+2}=12a_n$，即$a_n\cdot q+a_nq^2=12a_n$，

且$a_n\neq 0$，可得$q^2+q-12=0$，解得$q=3$或$q=-4$（舍去）．

又因为$S_5=\dfrac{a_1(1-3^5)}{1-3}=121$，解得$a_1=1$，

所以$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=3^{n-1}$．

（2）由（1）可得：$b_n=3^{n-1}+(n-1)\ln 3$，

所以$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\left(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}\right)+\left[1+2+3+\cdots+(n-1)\right]\ln 3$

$=\dfrac{1-3^n}{1-3}+\dfrac{(n-1)n}{2}\ln 3=\dfrac{3^n-1+(n-1)n\ln 3}{2}$，

所以$T_n=\dfrac{3^n-1+(n-1)n\ln 3}{2}$

18．在$\triangle ABC$中，$a=\sqrt{19}$，且$\dfrac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos A}=\dfrac{\cos B-\cos A}{\sin C}$

（1）求角 A；

（2）若点D为BC边上一点，$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{3}{4}$且$AD\perp AC$，求$\triangle ABC$的面积.

【答案】（1）$\dfrac{2\pi}{3}$　　（2）$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

【解析】（1）因为$\dfrac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos A}=\dfrac{\cos B-\cos A}{\sin C}$，

所以$\sin B\sin C+\sin^2 C=\cos^2 B-\cos^2 A$，

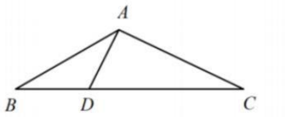
即$\sin B\sin C+\sin^2 C=\left(1-\sin^2 B\right)-\left(1-\sin^2 A\right)=\sin^2 A-\sin^2 B$，

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得，$bc+c^2=a^2-b^2$，即 $b^2+c^2-a^2=-bc$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，

又因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$．

（2）如图所示，



因为 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{3}{4}$，

所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}$

因为 $AD\perp AC$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

所以 $\left(\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

所以 $\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

即 $\dfrac{4}{7}bc\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{3}{7}\times b^2=0$，即 $2cb=3b^2$，

又因为 $b\neq 0$，所以 $2c=3b$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

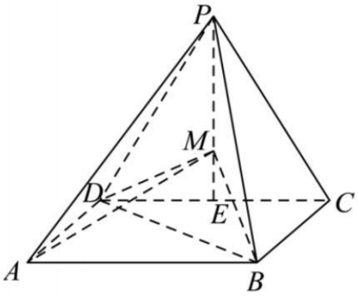
即 $19=b^2+c^2+bc$，

代入 $c=\dfrac{3}{2}b$，解得 $b=\pm 2$（负值舍去），

所以 $b=2,c=\dfrac{3}{2}b=3$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 2\times 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$．

19．如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为矩形，平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，$\triangle PCD$ 是边长为 2 等边三角形，$BC=\sqrt{2}$，点 E 为 CD 的中点，点 M 为 PE 上一点（与点 P，E 不重合）．



（1）证明：$AM \perp BD$；

（2）当 AM 为何值时，直线 AM 与平面 BDM 所成的角最大？

【答案】（1）证明见解析；　　（2）2.

【解析】（1）因为三角形 PCD 是等边三角形，且 E 是 DC 中点，

所以 $PE \perp CD$，

又因为 $PE \subset$ 平面 PCD，平面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PCD \cap$ 平面 $ABCD = CD$，

所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$，

又因为 $BD \subset$ 面 $ABCD$，

所以 $BD \perp PE$，

因为 $DE = 1, AD = \sqrt{2}, AB = 2$，$\dfrac{DE}{AD} = \dfrac{AD}{AB}$，

所以 $\mathrm{Rt}\triangle EDA \backsim \mathrm{Rt}\triangle DAB$，$\angle DAE = \angle ABD$，

所以 $\angle BAE + \angle ABD = \dfrac{\pi}{2}$，即 $AE \perp BD$，

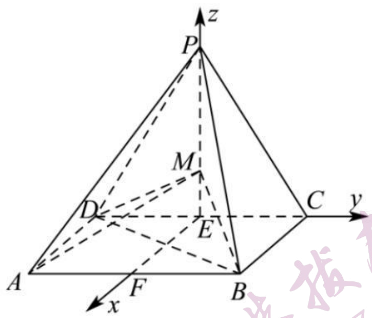
因为 $BD \perp PE, AE \cap PE = E, AE \subset$ 平面 $PAE, PE \subset$ 平面 PAE，

所以 $BD \perp$ 平面 PAE，

又因为 $AM \subset$ 平面 PAE，

所以 $BD \perp AM$；

（2）设 F 是 AB 中点，以 E 为原点，EF 所在直线为 x 轴，EC 所在直线为 y 轴，EP 所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系，



由已知得 $E(0,0,0), A(\sqrt{2},-1,0), B(\sqrt{2},1,0), D(0,-1,0), P(0,0,\sqrt{3})$，

设 $M(0,0,m)(0 < m < \sqrt{3})$，则 $\overrightarrow{AM} = (-\sqrt{2},1,m), \overrightarrow{BD} = (-\sqrt{2},-2,0), \overrightarrow{DM} = (0,1,m)$、

设平面 BDM 的法向量为 $\vec{n} = (a,b,c)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-\sqrt{2}a-2b=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DM}=b+mc=0\end{cases}$，

令$b=1$，有$\vec{n}=\left(-\sqrt{2},1,-\frac{1}{m}\right)$，

设直线AM与平面BDM所成的角α，

所以$\sin\alpha=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AM}\right\rangle\right|=\left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AM}\right|}\right|=\frac{2}{\sqrt{3+m^2}\cdot\sqrt{3+\frac{1}{m^2}}}=\frac{2}{\sqrt{10+3\left(m^2+\frac{1}{m^2}\right)}}\le\frac{1}{2}$，

当且仅当$m=1$时取等号，

当$AM=2$时，直线AM与平面BDM所成角最大．

20．已知函数$f(x)=\frac{\sin x}{e^x}(x\in R)$．

（1）求$f(x)$的单调区间；

（2）若对于任意的$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)\ge kx$恒成立，求实数$k$的取值范围．

【答案】（1）递增区间为$\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)(k\in Z)$，递减区间为$\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)(k\in Z)$

（2）$\left(-\infty,\frac{2}{\pi e^{\frac{\pi}{2}}}\right]$

【解析】（1）因为$f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$，则$f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}=\frac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{e^x}$，

令$f'(x)>0$，则$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$，即$2k\pi-\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，

解得$f(x)$的递增区间为$\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)(k\in Z)$；

令$f'(x)<0$，则$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0$，即$2k\pi+\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in Z)$，

解得$f(x)$的递减区间为$\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)(k\in Z)$；

球为红球，则该员工获得奖金 1000 元，否则该员工获得奖金 500 元.设第 $i(1 \le i \le n)$ 位员工获得奖金为 X_i 元.

（1）求 $X_2 = 1000$ 的概率；

（2）求 X_i 的数学期望 $E(X_i)$，并指出第几位员工获得奖金额的数学期望最大.

【答案】（1）$\frac{11}{16}$　（2）$E(X_i)=\frac{500}{3}\left[5+\left(\frac{1}{4}\right)^i\right]$，第 1 位

【解析】（1）$X_2 = 1000$ 的情形为第 2 位员工从第 2 个盒子中摸出红球，包括两种情况：

①第 1 位员工从从第 1 个盒子中摸出红球放入第 2 个盒子后第 2 位员工摸出红球；
②第 1 位员工从从第 1 个盒子中摸出白球放入第 2 个盒子后第 2 位员工摸出红球.

故 $X_2 = 1000$ 的概率为：$P(X_2 = 1000) = \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{16}$.

（2）设第 i 位员工取出红球的概率为 P_i. 则有 $P_{i+1}=\frac{3}{4}P_i+\frac{1}{2}(1-P_i)=\frac{1}{4}P_i+\frac{1}{2}$，

即：$P_{i+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\left(P_i-\frac{2}{3}\right)$，且 $P_1=\frac{3}{4}, P_1-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}\ne 0$

故 $\left\{P_i-\frac{2}{3}\right\}$ 组成首项为 $\frac{1}{12}$，公比为 $\frac{1}{4}$ 的等比数列.

$\therefore P_i-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{i-1}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^i$，即 $P_i=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^i$

第 i 位员工取出白球的概率为 $1-P_i=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^i$.

易知 X 的所有可能取值为 $1000, 500$，则 X 的分布列如下：

X_i	1000	500
P	$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^i$	$\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^i$

$E(X_i)=1000[\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{4})^i]+500\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^i\right]$

$=500\left[\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^i\right]+500\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^i\right]=\frac{500}{3}\left[5+\left(\frac{1}{4}\right)^i\right]$

所以 $f(x)$ 的递增区间为 $\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)(k\in Z)$，递减区间为 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)(k\in Z)$.

（2）因为对于任意的 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)\geq kx$ 恒成立，

所以 $\frac{\sin x}{e^x}\geq kx$ 对于任意的 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立，

当 $x=0$ 时，$k\in R$；

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$k\leq\frac{\sin x}{xe^x}$，

令 $g(x)=\frac{\sin x}{xe^x},x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $g'(x)=\frac{x\cos x-\sin x-x\sin x}{x^2e^x}$，

令 $h(x)=x\cos x-\sin x-x\sin x,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，

所以 $h'(x)=-x\sin x-\sin x-x\cos x<0$ 在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立

所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减

所以 $h(x)<h(0)=0$，即 $g'(x)<0$ 在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，所以 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi e^{\frac{\pi}{2}}}$，

所以 $k\leq\frac{2}{\pi e^{\frac{\pi}{2}}}$.

综上，实数 k 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{2}{\pi e^{\frac{\pi}{2}}}\right]$

21．某公司为激励员工，在年会活动中，该公司的 $n(n\geq 3)$ 位员工通过摸球游戏抽奖，其游戏规则为：每位员工前面都有 1 个暗盒，第 1 个暗盒里有 3 个红球与 1 个白球.其余暗盒里都恰有 2 个红球与 1 个白球，这些球的形状大小都完全相同.第 1 位员工从第 1 个暗盒里取出 1 个球，并将这个球放入第 2 个暗盒里，第 2 位员工再从第 2 个暗盒里面取出 1 个球并放入第 3 个暗盒里，依次类推，第 $n-1$ 位员工再从第 $n-1$ 个暗盒里面取出 1 个球并放入第 n 个暗盒里.第 n 位员工从第 n 个暗盒中取出 1 个球，游戏结束.若某员工取出的

显然 $E\left(X_i\right)$ 关于 i 单调递减，∴第 1 位员工获得奖金额的数学期望最大.

22．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，斜率为 2 的直线 l 与 x 轴交于点 M，l 与 C 交于 A，B 两点，D 是 A 关于 y 轴的对称点．当 M 与原点 O 重合时，$\triangle ABD$ 面积为 $\dfrac{16}{9}$．

（1）求 C 的方程；

（2）当 M 异于 O 点时，记直线 BD 与 y 轴交于点 N，求 $\triangle OMN$ 周长的最小值．

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　（2）$2+\sqrt{2}$

【解析】（1）当 M 与原点 O 重合时，可设 $A\left(x_0,y_0\right)$，则有 $B\left(-x_0,-y_0\right)$、$D\left(-x_0,y_0\right)$，

且 $y_0=2x_0$，即有 $AD\perp BD$，

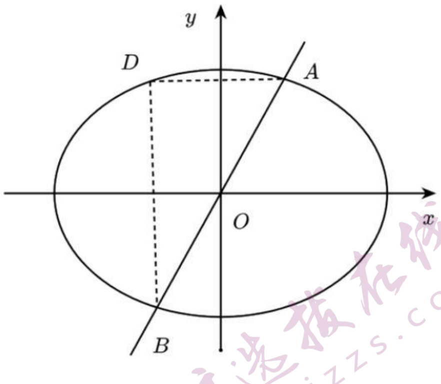
则 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}|AD|\cdot|BD|=\dfrac{1}{2}\left(x_0+x_0\right)\left(y_0+y_0\right)=\dfrac{16}{9}$，

即 $4x_0^2=\dfrac{16}{9}$，又 $x_0>0$，故 $x_0=\dfrac{2}{3}$，则 $y_0=\dfrac{4}{3}$，

即有 $\dfrac{4}{9a^2}+\dfrac{16}{9b^2}=1$，由离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

则 $a^2=2c^2=b^2+c^2$，故 $a^2=2b^2$，即有 $\dfrac{4}{18b^2}+\dfrac{16}{9b^2}=1$，

解得 $b^2=2$，故 $a^2=4$，即 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$；



（2）设直线 l 方程为 $y=2x+t$，令 $y=0$，有 $x=-\dfrac{t}{2}$，即 $x_M=-\dfrac{t}{2}$，

设点 $A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$，则 $D\left(-x_1,y_1\right)$，

联立直线与椭圆方程：$\begin{cases} y=2x+t \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$，消去$y$有$9x^2+8tx+2t^2-4=0$，

$\Delta=64t^2-36\left(2t^2-4\right)=144-8t^2>0$，即$-3\sqrt{2}<t<3\sqrt{2}$，

有$x_1+x_2=\frac{-8t}{9}$，$x_1x_2=\frac{2t^2-4}{9}$，

l_{BD}为$y=\frac{y_1-y_2}{-x_1-x_2}\left(x-x_2\right)+y_2$，

令$x=0$，故$y_N=\frac{-x_2y_1+x_2y_2}{-x_1-x_2}+y_2=\frac{x_2y_1-x_2y_2+x_1y_2+x_2y_2}{x_1+x_2}=\frac{x_2y_1+x_1y_2}{x_1+x_2}$，

由$y=2x+t$，故$\frac{x_2y_1+x_1y_2}{x_1+x_2}=\frac{x_2\left(2x_1+t\right)+x_1\left(2x_2+t\right)}{x_1+x_2}=\frac{4x_1x_2}{x_1+x_2}+t$，

其中$\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}=\frac{\frac{2t^2-4}{9}}{\frac{-8t}{9}}=-\frac{t}{4}+\frac{1}{2t}$，即$y_N=4\left(-\frac{t}{4}+\frac{1}{2t}\right)+t=\frac{2}{t}$，

则$C_{\triangle OMN}=\left|y_N\right|+\left|x_M\right|+\sqrt{\left|y_N\right|^2+\left|x_M\right|^2}=\frac{2}{|t|}+\frac{|t|}{2}+\sqrt{\frac{4}{t^2}+\frac{t^2}{4}}$

$\geq 2\sqrt{\frac{2}{|t|}\cdot\frac{|t|}{2}}+\sqrt{2\sqrt{\frac{4}{t^2}\cdot\frac{t^2}{4}}}=2+\sqrt{2}$，

当且仅当$t=\pm 2$时等号成立，

故$\triangle OMN$周长的最小值为$2+\sqrt{2}$.