

合肥一中 2024 届高三上学期期末质量检测卷 · 数学

参考答案、提示及评分细则

1. A $\frac{3+ai}{2-i} = \frac{(3+ai)(2+i)}{5} = \frac{6-a}{5} + \frac{3+2a}{5}i$, $\frac{3+ai}{2-i}$ 的实部与虚部相等, 则 $\frac{6-a}{5} = \frac{3+2a}{5}$, 所以 $a=1$. 故选 A.
2. B 因为 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x | a < x < a^2\}$, 若 $A \subset B$, 则 $\begin{cases} a < 1, \\ a^2 > 3, \end{cases}$ 所以 $a < -\sqrt{3}$. 故选 B.
3. B 由图易得 A 正确; 与 2021 年相比, 2022 年人工智能应用渗透率增长最快的是电信和医疗行业, B 错误; 2021 年十大行业人工智能应用渗透率的极差为 $81\% - 25\% = 56\%$, C 正确; 2022 年十大行业人工智能应用渗透率的中位数是 $\frac{45\% + 40\%}{2} = 42.5\%$, D 正确. 故选 B.
4. D $2\sin 80^\circ \cos 20^\circ = 2\sin(60^\circ + 20^\circ) \cos 20^\circ = (\sqrt{3}\cos 20^\circ + \sin 20^\circ) \cos 20^\circ = \sqrt{3}\cos^2 20^\circ + \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \frac{\sqrt{3}(1+\cos 40^\circ)}{2} + \frac{\sin 40^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(40^\circ + 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 10^\circ$, $2\sin 80^\circ \cos 20^\circ - \frac{\sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 10^\circ - \cos 10^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.
5. C C_1 的焦点为 $(1, 0)$, C_2 的焦点为 $(0, 1)$, 过 C_1 与 C_2 焦点的直线方程为 $x+y=1$, A 错误; C_1 与 C_2 有 $(0, 0)$, $(4, 4)$ 2 个公共点, B 错误; 与 x 轴平行的直线与 C_1 有 1 个交点, 与 C_2 最多有 2 个交点, C 正确; C_1 与 C_2 关于直线 $y=x$ 对称, 若存在直线与 C_1 和 C_2 都相切, 则该切线也关于直线 $y=x$ 对称, 不妨设为 $y=-x+t$, 与 $x^2=4y$ 联立得 $x^2+4x-4t=0$, 由 $\Delta=0$ 得 $t=-1$, 所以直线 $y=-x-1$ 与 C_1 和 C_2 都相切, D 错误. 故选 C.
6. C 由 $\ln y = \ln x + \ln(y-x)$ 得 $y = x(y-x) = xy - x^2$, 所以 $y = \frac{x^2}{x-1}$, 由 $x > 0, y > 0$ 得 $x > 1$, 所以 $f(x) = \frac{x^2}{x-1} (x > 1)$, 排除 AB, 由 $f(2) = 4$, 可排除 D. 故选 C.
7. A 由题意可得惊鸟铃的体积约为 $\frac{1}{3} \times \pi \times 8^2 \times 20 - \frac{1}{3} \times \pi \times 8^2 \times 18 = 128(\text{cm}^3)$, 所以该惊鸟铃的质量约为 $128 \times 8.96 = 1146.88(\text{g}) \approx 1(\text{kg})$. 故选 A.
8. B 满足 $\frac{k^2-k+2}{2} \leq n \leq \frac{k^2+k}{2}$ 的 n 的值共有 k 个, 对应的数列的项也有 k 个, 这 k 项的和为 $(1 + \frac{2}{k})2^k \times k = (k+2)2^k = (k+1)2^{k+1} - k2^k$, 设 $b_n = (n+1)2^{n+1} - n2^n$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 28 项和就是数列 $\{b_n\}$ 的前 7 项和, 其和为 $8 \times 2^8 - 2 = 2046$. 故选 B.
9. CD 由椭圆定义得 $|PF_1| + |PF_2| = 4$, $|F_1F_2| = 2\sqrt{3}$, $|PF_1| + |PF_2| - |F_1F_2| = 4 - 2\sqrt{3}$, A 错误; $||PF_1| - |PF_2|| \leq (\frac{|PF_1| + |PF_2|}{2})^2 = 4$, 当 $|PF_1| = |PF_2|$ 时取等号, B 错误; $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$, 设 $P(x, y)$, 则 $-2 \leq x \leq 2, y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$, $|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}$, 由 $-2 \leq x \leq 2$, 可得 $2 \leq |\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| \leq 4$, C 正确; $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = x^2 - 3 + y^2 = \frac{3}{4}x^2 - 2$, $-2 \leq \frac{3}{4}x^2 - 2 \leq 1$, D 正确. 故选 CD.
10. ACD 因为 $P(A) = P(AB + A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B})$, $P(B) = P(AB + \bar{A}B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$, 因为 $P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B)$, 所以 $P(A) = P(B)$, A 正确; 因为 $P(A+B) = P(AB + \bar{A}B + A\bar{B}) = P(AB) + P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) = P(AB) + \frac{1}{2} = 1$, 所以 $P(AB) = \frac{1}{2}$, $P(A) = P(B) = P(AB) + P(A\bar{B}) = \frac{3}{4}$,

【高三上学期期末质量检测卷 · 数学参考答案 第 1 页(共 4 页)】

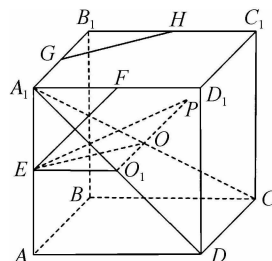
$P(AB) \neq P(A)P(B)$, B 错误, C 正确; $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$, D 正确. 故选 ACD.

11. ABD 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 对于 A, 因为 $f'(x) = a + 3\cos 3x$, 要使 $f'(x) = f'(x_1)$, 则 $x = \pm x_1 + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$, x 的值有无数个, A 正确; 对于 B, 存在点 A, B, 使得曲线 $y = f(x)$ 在点 A, B 处的切线垂直, 即存在 x_1, x_2 , 使得 $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = (a + 3\cos 3x_1)(a + 3\cos 3x_2) = -1$, 因为 $a - 3 \leq a + 3\cos 3x_1 \leq a + 3, a - 3 \leq a + 3\cos 3x_2 \leq a + 3$, 所以 $(a - 3)(a + 3) \leq -1, -2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$, B 正确; 对于 C, 对于任意点 A, B, 直线 AB 的斜率恒小于 1, 则 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 1$, 即 $\frac{f(x_1) - x_1 - [f(x_2) - x_2]}{x_1 - x_2} < 0$, 所以 $y = f(x) - x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数, 所以 $f'(x) - 1 = a - 1 + 3\cos 3x \leq a + 2 \leq 0, a \leq -2$, C 错误; 对于 D, 曲线 $y = f(x)$ 在点 A, B 处的切线都过原点, 则 $a + 3\cos 3x_1 = \frac{ax_1 + \sin 3x_1}{x_1}$, 整理得 $\tan 3x_1 = 3x_1$, 同理可得 $\tan 3x_2 = 3x_2$, 所以 $\frac{\tan 3x_1 - \tan 3x_2}{x_1 - x_2} = 3$, D 正确. 故选 ABD.

12. -160 $\frac{(2x-y)^5}{x^2y^3}$ 的展开式中 x 的系数即 $(2x-y)^5$ 展开式中 x^3y^3 的系数, 即 $C_5^3 \cdot 2^3 \cdot (-1)^3 = -160$.

13. $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{8}{3}$ 因为 $f(x+\pi) = f(-x)$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 所以 $\sin(\frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{6}) = \pm 1$, 即 $\frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\omega = \frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbf{Z}, \because \omega > 0, \therefore k \geq 0, k \in \mathbf{Z}$, 因为 $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12})$ 上单调, 所以 $\frac{\pi}{12} - (-\frac{\pi}{4}) \leq \frac{T}{2}$, 解得 $\omega \leq 3$. 经检验, 当 $k=0$ 时, $\omega = \frac{2}{3}$, 当 $k=1$ 时, $\omega = \frac{8}{3}$ 均满足题意.

14. $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ 点 E, F, G, H 都在球 O 的表面上, 则球 O 是正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱切球, 球心为对角线 A_1C 的中点, 半径为 $\sqrt{2}$, 取 A_1D 的中点 O_1 , 则点 P 为 O_1O 延长线与球 O 表面的交点时点 P 到平面 ADD_1A_1 的距离最大, 此时 $O_1P = 1 + \sqrt{2}, O_1E = 1, PE = \sqrt{O_1E^2 + O_1P^2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$. 连接 OE, 则 $OE \parallel AC \parallel GH$, $\angle PEO$ 就是异面直线 PE 与 GH 所成角, 因为 $OE = OP = \sqrt{2}$, 所以 $\cos \angle PEO = \frac{\frac{1}{2}PE}{OE} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, 所以异面直线 PE 与 GH 所成角的余弦值的平方为 $\frac{2 + \sqrt{2}}{4}$.



15. 解: $\because \triangle ABC$ 中三边 a, b, c 的对角分别为 A, B, C ,

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\text{又} \because \sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A + \sin B \sin C,$$

$$\therefore b^2 + c^2 = a^2 + bc, \text{即 } b^2 + c^2 - a^2 = bc,$$

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

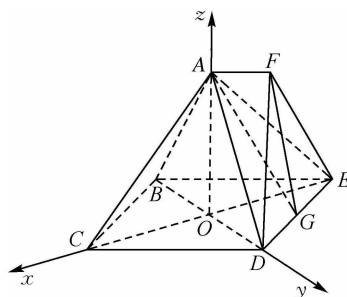
$$(1) \because S = 2\sqrt{3} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bc \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}bc,$$

$$\therefore bc = 8, \therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (b+c)^2 - 2bc(1 + \cos A)$$

$$= 6^2 - 2 \times 8 \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 12,$$

$$\therefore a = 2\sqrt{3}. \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

- (2) $f(x) = 3x^2 - \frac{\ln x}{\cos A} - 4x + 1 = 3x^2 - 2\ln x - 4x + 1 (x > 0)$,
- $f'(x) = 6x - \frac{2}{x} - 4 = \frac{6x^2 - 4x - 2}{x} = \frac{2(x-1)(3x+1)}{x}$, 8分
- ∵ $x > 0$, ∴ $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为负, 在 $(1, +\infty)$ 上为正,
- ∴ $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数, 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数, 10分
- ∴ $f(x)_{\min} = f(1) = 3 - 4 + 1 = 0$, ∴ $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点. 12分
- ∴ 要使 $f(x)$ 在 $(0, t)$ 上有零点, 则 t 的取值范围是 $(1, +\infty)$ 13分
16. 解: (1) $\bar{x} = 900 + \frac{28+33+45+50+59+67+67+75+82+94}{10} = 960$, 2分
- 所以 $\mu = 960$ 3分
- (2) 由(1)知, $X \sim N(960, 20^2)$,
- $P(X < 940) = P(X < \mu - \sigma) = \frac{1 - P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)}{2} \approx \frac{1 - 0.68}{2} = 0.16$.
- 该生产线上生产的 1 000 个零部件中, 质量分数低于 940 的个数约为
- $0.16 \times 1\ 000 = 160$ 7分
- (3) 每个零部件的质量分数在 $[940, 980]$ 内的概率为 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.68$,
- 由题意可知 $\xi \sim B(n, 0.68)$,
- 则 $P(\xi = 10) = C_n^{10} \times 0.68^{10} \times 0.32^{n-10}$, 9分
- 设 $f(n) = C_n^{10} \times 0.68^{10} \times 0.32^{n-10} (n \geq 10)$,
- 则 $\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{C_{n+1}^{10} \times 0.68^{10} \times 0.32^{n-9}}{C_n^{10} \times 0.68^{10} \times 0.32^{n-10}} = \frac{0.32n + 0.32}{n-9}$, 11分
- 令 $\frac{0.32n + 0.32}{n-9} > 1$, 得 $n < \frac{9.32}{0.68} \approx 13.7$,
- 所以当 $n \leq 13$ 时, $f(n+1) > f(n)$, 12分
- 令 $\frac{0.32n + 0.32}{n-9} < 1$, 得 $n > \frac{9.32}{0.68} \approx 13.7$,
- 所以当 $n \geq 14$ 时, $f(n+1) < f(n)$, 14分
- 所以 $n = 14$ 时, $f(n)$ 最大, 故使 $P(\xi = 10)$ 最大的 n 的值为 14. 15分
17. 解: (1) 当点 G 为 DE 中点时, 平面 $AFG \perp$ 平面 ABC , 证明如下: 1分
- 因为四棱锥 $A-BCDE$ 是正四棱锥,
- 所以 $AD = AE, AG \perp DE$ 2分
- 在正方形 $BCDE$ 中, $DE \parallel BC$, 所以 $AG \perp BC$,
- 在正方形 $BCDE$ 中, $CD \perp BC$, 因为 $AF \parallel CD$,
- 所以 $AF \perp BC$, 4分
- 因为 $AF \cap AG = A, AF, AG \subset$ 平面 AFG ,
- 所以 $BC \perp$ 平面 AFG , 5分
- 因为 $BC \subset$ 平面 ABC ,
- 所以平面 $ABC \perp$ 平面 AFG 6分
- (2) 连接 BD , 与 CE 交于点 O , 连接 AO , 因为四棱锥 $A-BCDE$ 是正四棱锥,
- 所以 OC, OD, OA 两两垂直, 以 O 为坐标原点, 以直线 OC, OD, OA 分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,
- 则 $O(0, 0, 0), A(0, 0, 3), B(0, -3, 0), C(3, 0, 0), D(0, 3, 0), F(-1, 1, 3)$, 9分



所以 $\vec{BA} = (0, 3, 3), \vec{CA} = (-3, 0, 3), \vec{DF} = (-1, -2, 3)$ 10分

设平面 ABC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则有 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{BA} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{CA} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 3y + 3z = 0, \\ -3x + 3z = 0, \end{cases}$

取 $z = 1$, 得 $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$, 13分

设直线 DF 与平面 ABC 所成角为 θ ,

$$\sin \theta = \frac{|\vec{DF} \cdot \mathbf{n}|}{|\vec{DF}| |\mathbf{n}|} = \frac{|(-1) \times 1 + (-2) \times (-1) + 3 \times 1|}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 3^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{42}}{21},$$

故直线 DF 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{42}}{21}$ 15分

18. (1)解: 双曲线 C_2 的一条渐近线的方程为 $y = \frac{1}{2}x$,

因为双曲线 C_1 的一条渐近线与双曲线 C_2 的一条渐近线垂直,

所以双曲线 C_1 的一条渐近线的方程为 $y = -2x$, 所以 $\frac{b}{a} = 2, b = 2a$, 3分

$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}a$, 所以 C_1 的一个焦点为 $F(\sqrt{5}a, 0)$,

点 F 到双曲线 C_2 的一条渐近线 $y = \frac{1}{2}x$ 的距离为 $\frac{\sqrt{5}a}{\sqrt{5}} = a = 2$,

所以 $b = 4, C_1$ 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ 7分

(2)证明: 设 $A(m, n)$, 则 $\frac{m^2}{4} - \frac{n^2}{16} = 1$, 即 $4m^2 - n^2 = 16, m^2 \geq 4$, 8分

由题意, 得 $A'(n, m)$, 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 不失一般性, 设 $A'P$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$,

则直线 $A'P$ 的方程为 $y - m = \frac{1}{2}(x - n)$, 与 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 联立得

$$x_1 = \frac{2}{n-2m} + \frac{n-2m}{2} = -\frac{2m+n}{8} - m + \frac{1}{2}n = \frac{3}{8}n - \frac{5}{4}m,$$

直线 $A'Q$ 的方程为 $y - m = -\frac{1}{2}(x - n)$, 与 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 联立得

$$x_2 = \frac{2m+n}{2} + \frac{2}{2m+n} = \frac{2m+n}{2} + \frac{2m-n}{8} = \frac{3}{8}n + \frac{5}{4}m, \dots\dots\dots 15分$$

$$\text{所以 } |A'P| \cdot |A'Q| = \frac{\sqrt{5}}{2} |x_1 - n| \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} |x_2 - n| = \frac{5}{4} \left| \frac{25n^2}{64} - \frac{25m^2}{16} \right| = \frac{125}{64} \left| \frac{n^2}{4} - m^2 \right| = \frac{125}{16},$$

故 $|A'P| \cdot |A'Q|$ 为定值 $\frac{125}{16}$ 17分

19. 解: (1)由题意 $x(x-1) \equiv 0 \pmod{3}$, 所以 $x = 3k$ 或 $x-1 = 3k(k \in \mathbf{Z})$, 即 $x = 3k$ 或 $x = 3k+1(k \in \mathbf{Z})$ 4分

(2)由(1)可得 $\{a_n\}$ 为 $\{3, 4, 6, 7, 9, 10, \dots\}$, 所以 $a_n = \begin{cases} 3 \times \frac{n+1}{2} & (n \text{ 为奇数}), \\ 3 \times \frac{n}{2} + 1 & (n \text{ 为偶数}). \end{cases}$ 6分

①因为 $b_n = a_{n+1} - a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 所以 $b_n = \begin{cases} 1 & (n \text{ 为奇数}), \\ 2 & (n \text{ 为偶数}). \end{cases}$

$$S_{2 \cdot 024} = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{2 \cdot 024} = 3 \times 1 \ 012 = 3 \ 036. \dots\dots\dots 9分$$

② $c_n = \tan a_{2n+1} \cdot \tan a_{2n-1} = \tan 3n \cdot \tan 3(n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$ 10分

因为 $\tan 3n \cdot \tan 3(n+1) = \frac{\tan 3(n+1) - \tan 3n}{\tan 3} - 1$, 13分

$$\begin{aligned} \text{所以 } T_n &= c_1 + c_2 + \dots + c_n = \left(\frac{\tan 6 - \tan 3}{\tan 3} - 1 \right) + \left(\frac{\tan 9 - \tan 6}{\tan 3} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{\tan 3(n+1) - \tan 3n}{\tan 3} - 1 \right) \\ &= \frac{\tan 3(n+1) - \tan 3}{\tan 3} - n = \frac{\tan 3(n+1)}{\tan 3} - n - 1. \dots\dots\dots 17分 \end{aligned}$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

