汕头市 2023～2024 学年度普通高中毕业班期末调研测试

数学科参考答案

第 I 卷

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	A	C	D	C	C	B	B	BCD	AC	AB	ACD

10.【解析】 以 $f(x)=\log_2 x$ 为函数模型易得.

11.【解析】 由题设知 $y=e^{kx+b}$ 是减函数，$\therefore k<0$，又 $120=e^b>1$，$\therefore b>0$，故A正确；

$\because 30=e^{20k+b}=e^{20k}\cdot e^b$，$\therefore e^{20k}=\frac{1}{4}$，则 $e^{10k+b}=e^{10k}\cdot e^b=\frac{1}{2}\times 120=60$，故B正确；

由 $e^{kx+b}\ge 15$，则 $e^{kx}\ge\frac{1}{8}=e^{30k}$，$\therefore kx\ge 30k$，又 $k<0$，$\therefore x\le 30$，故C错误；

当 $x=-2$ 时，$e^{-2k+b}=\left(e^k\right)^{-2}\cdot e^b=\left(e^{10k}\right)^{-\frac{1}{5}}\cdot 120=2^{\frac{1}{5}}\cdot 120<150$，故D错误；

12.【解析】 显然，三棱锥 $P-ABC$ 为“鳖臑”，由 $BC\perp$ 平面 PAB 知，A 正确；

由 PC 为外接球直径知，当点E是 $\triangle ABC$ 的顶点时，EF 的最大值为球的直径，即 $2\sqrt{3}$，故 B 错误；

点 F 的轨迹是平行于平面 PBC 的球截面圆周，其半径为 $\frac{AD}{2}=1$，从而周长为 2π，故 C 正确；

取 AC 中点 H，则面 PAC 与面 PFB 夹角的最小值为直线 PB 与面 PAC 所成的角 $\angle PHB$，由 $\cos\angle PHB=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}>\frac{\sqrt{6}}{3}$ 知，D 正确

第 II 卷

题号	13	14	15	16
答案	6	$\frac{28\sqrt{2}}{3}$	$\left[\frac{7}{3},\frac{10}{3}\right)$	6:1

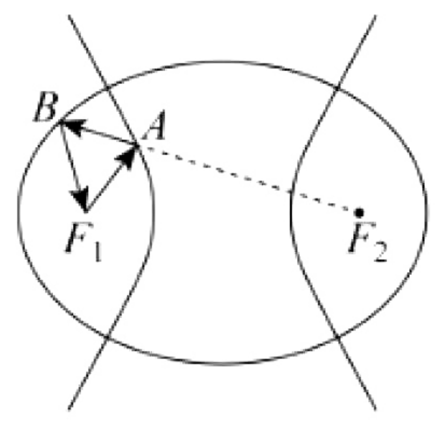
15.【解析】 $\because 0\le x\le\pi$，$\therefore\frac{2\pi}{3}\le\omega x+\frac{2\pi}{3}\le\omega\pi+\frac{2\pi}{3}$，$\therefore 3\pi\le\omega\pi+\frac{2}{3}\pi<4\pi$ 即 $\frac{7}{3}\le\omega<\frac{10}{3}$

16.【答案】 图①中，由椭圆的定义得 $|BF_1|+|BF_2|=2a_1$，由双曲线的定义得 $|AF_2|-|AF_1|=2a_2$，

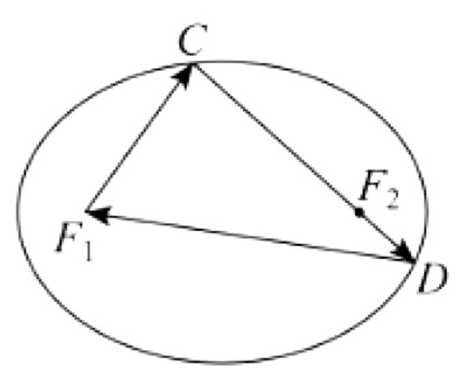
故 $|BF_1|+|BF_2|-|AF_2|+|AF_1|=2a_1-2a_2$，

从而 $\triangle ABF_1$ 的周长为 $2a_1-2a_2$

在图②中，$\triangle CDF_1$ 的周长为 $4a_1$，



图①



图②

$\because \dfrac{e_1}{e_2}=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{2}{3}$， $\therefore \dfrac{t_2}{t_1}=\dfrac{4a_1}{2a_1-2a_2}=6$

17.【答案】

（1）在$\triangle ABC$中，$\because b\sin\dfrac{B+C}{2}=b\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}\right)=b\cos\dfrac{A}{2}=a\sin B$，

由正弦定理得：$\sin B\cos\dfrac{A}{2}=\sin A\sin B$，

$\because 0<B<\pi$，$\therefore \sin B\neq 0$，$\therefore \cos\dfrac{A}{2}=\sin A$，$\therefore \cos\dfrac{A}{2}=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$，

$\because 0<\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \cos\dfrac{A}{2}>0$，$\therefore \sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$，即$A=\dfrac{\pi}{3}$；

（2）由M为$\triangle ABC$的重心知：$BD=CD$，$AD=3\sqrt{3}$，

$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，$\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$，

由余弦定理得：$\dfrac{AD^2+BD^2-c^2}{2AD\cdot BD}=-\dfrac{AD^2+CD^2-b^2}{2AD\cdot CD}$，即$b^2+c^2=72$，

$\triangle ABC$中，由余弦定理得：$6^2=b^2+c^2-2bc\cos\dfrac{\pi}{3}$，即$b^2+c^2-bc=36$，

$\therefore bc=36$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=9\sqrt{3}$

18.【答案】

（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

由$S_4=4S_2$得：$4a_1+6d=4(2a_1+d)$，即$d=2a_1$，

所以$a_n=a_1+(n-1)d=(2n-1)a_1$.

由$a_{2n}=2a_n+1$得：$(4n-1)a_1=2(2n-1)a_1+1$，即$-a_1=-2a_1+1$，解得$a_1=1$，

所以$a_n=2n-1$，$n\in \mathrm{N}^*$；

（2）记数列$\left\{(-1)^n\cdot a_n\right\}$的前$n$项和为$T_n$，设$k\in \mathrm{N}^*$，则

$T_{2k}=(-a_1+a_2)+(-a_3+a_4)+\cdots+(-a_{2k-1}+a_{2k})=2k$，

$T_{2k-1}=T_{2k}-a_{2k}=2k-(4k-1)=1-2k$，

$\therefore T_n=\begin{cases} n, n\text{为偶数} \\ -n, n\text{为奇数} \end{cases}$.

19.【答案】

（1）取 A_1B 中点 Q，连结 PQ、EQ，则 $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{FE}$，

故四边形 $EFPQ$ 是平行四边形，$\therefore FP//EQ$，

又 $FP\not\subset$ 平面 A_1BE，$EQ\subset$ 平面 A_1BE，所以 $FP//$ 平面 A_1BE；.

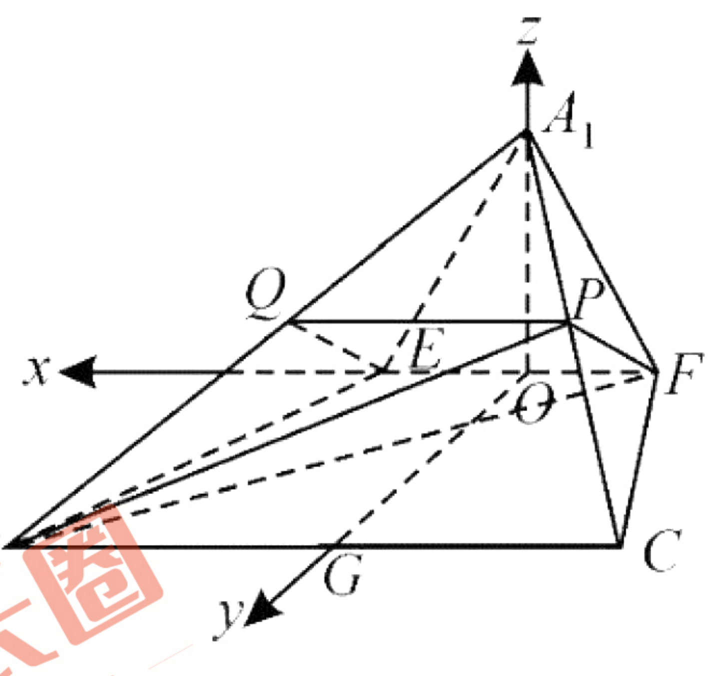
（2）分别取 EF、BC 的中点 O、G，则 $A_1O\perp EF$，$OG\perp EF$，

由平面 $A_1EF\perp$ 平面 $EFCB$ 且交线为 EF 得：$A_1O\perp$ 平面 $EFCB$，

如图，以 O 为原点，直线 OE、OG、OA_1 所在分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $B\left(2,\sqrt{3},0\right)$，$A_1\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，$F\left(-1,0,0\right)$，$C\left(-2,\sqrt{3},0\right)$，$P\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{FP}=\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{FB}=\left(3,\sqrt{3},0\right)$.



设平面 BFP 的法向量 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{FP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{FB}=3x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，取 $x=1$，得 $\vec{n}=\left(1,-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$，

又 $\vec{m}=\left(0,0,1\right)$ 为平面 BCF 的法向量，

$\therefore \cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{1\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

所以平面 BFP 与平面 BCF 所成的角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

20.【答案】

（1）

性别	体育锻炼		合计
	喜欢	不喜欢	
男	80	40	120
女	30	50	80
合计	110	90	200

零假设 H_0：喜欢体育锻炼与性别无关，

根据表中数据，计算得到：$\chi^2=\dfrac{200\times\left(80\times50-40\times30\right)^2}{120\times80\times110\times90}\approx16.498>10.828$

依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为喜欢体育锻炼与性别有关.

被调查的学生中，喜欢体育锻炼的男、女生的频率分别为 $\dfrac{80}{120}\approx0.667$ 和 $\dfrac{30}{80}=0.375$，

由 $\dfrac{0.667}{0.375}\approx1.8$，并根据频率稳定于概率的原理，可认为喜欢体育锻炼的学生中，男生的概率明显大于女生的概率，即男生更喜欢体育锻炼；

（2）（i）事件 ABC 表示“3 男生中至少两人喜欢体育锻炼”或“2 男生都喜欢体育锻炼，1 女生”，

$\therefore P\left(ABC\right)=\dfrac{\left(C_8^2C_4^1+C_8^3\right)+C_8^2C_8^1}{C_{20}^3}=\dfrac{98}{285}$，$P\left(B|A\right)=\dfrac{C_8^3+C_8^2C_{12}^1}{C_{12}^3+C_{12}^2C_8^1}=\dfrac{98}{187}$；

（ii）有 $P\left(ABC\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B|A\right)\cdot P\left(C|AB\right)$.

证明：$P\left(A\right)\cdot P\left(B|A\right)\cdot P\left(C|AB\right)=P\left(A\right)\cdot\dfrac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}\cdot\dfrac{P\left(ABC\right)}{P\left(AB\right)}=P\left(ABC\right)$.

21.【答案】

（1）由题设，AC 为动圆的直径，故 $AB\perp CB$，

于是 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=\left(x,4\right)\cdot\left(x,-y\right)=0$，即 $x^2=4y$，

故点 $M\left(x,y\right)$ 的轨迹 T 的方程为 $x^2=4y$；

（2）依题意，直线 PQ 的斜率存在且大于 0，设其方程为 $y=kx+m\left(m>0\right)$，$P\left(x_1,y_1\right)$，$Q\left(x_2,y_2\right)$，

由题设得：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=0$，

由 $\begin{cases}y=kx+m\\x^2=4y\end{cases}$ 得：$x^2-4kx-4m=0$，

故 $\Delta=16\left(k^2+m\right)>0$，且 $x_1x_2=-4m$，$y_1y_2=\dfrac{x_1^2x_2^2}{16}=m^2$，

所以 $m^2-4m=0$，即 $m=0$（舍去）或 $m=4$，

故直线 AB 经过定点 $N\left(0,4\right)$，

又因为 $OH\perp AB$，则点 H 在以 ON 为直径的圆上，

取 ON 中点 $R(0,2)$，则 $|RH|=\dfrac{1}{2}|ON|=2$，因此，存在定点 $R(0,2)$ 使得 $|RH|$ 为定值 2.

22.【答案】

（1）依题意，$x\in(0,+\infty)$ 且 $f'(x)=\ln x+1-a$，

由 $f'(x)>0$ 得 $x>e^{a-1}$，由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<e^{a-1}$，

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0,e^{a-1}\right)$ 上递减，在 $\left(e^{a-1},+\infty\right)$ 上递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f\left(e^{e-a}\right)=a-e^{a-1}\geq 0$，

令 $h(a)=a-e^{a-1}$，则 $h'(a)=1-e^{a-1}$

由 $h'(a)>0$ 得 $a<1$，由 $h'(a)<0$ 得 $a>1$，

$\therefore h(a)$ 在 $(-\infty,1)$ 上递增，在 $(1,+\infty)$ 上递减，

$\therefore h(a)\leq h(1)=0$，即 $a-e^{a-1}\leq 0$，当且仅当 $a=1$ 时，等号成立，

$\therefore a=1$；

（2）令 $g(x)=x-\sin x$，$x>0$，则 $g'(x)=1-\cos x\geq 0$，且不恒为 0，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

$\therefore g(x)>g(0)=0$，即当 $x>0$ 时，$\sin x<x$，

由(1)知，当 $a=1$ 时，$\ln x\leq\dfrac{1}{x}-1$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，

$\therefore\forall 1\leq k\leq n$，$k\in\mathrm{N}^*$，$\ln\dfrac{n+k-1}{n+k}<\dfrac{n+k-1}{n+k}-1=-\dfrac{1}{n+k}$，

即 $\dfrac{1}{n+k}<-\left[\ln(n+k-1)-\ln(n+k)\right]$，

$\therefore\sin\dfrac{1}{n+k}<\dfrac{1}{n+k}<-\left[\ln(n+k-1)-\ln(n+k)\right]$

$\therefore\sin\dfrac{1}{n+1}+\sin\dfrac{1}{n+2}+\sin\dfrac{1}{n+3}\cdots+\sin\dfrac{1}{2n}<-\left[\ln n-\ln(n+1)+\ln(n+1)-\ln(n+2)+\cdots\ln(2n-1)-\ln(2n)\right]$

$=\ln(2n)-\ln n=\ln 2$．