

姓名\_\_\_\_\_ 准考证号\_\_\_\_\_

秘密★启用前

# 数 学

注意事项:

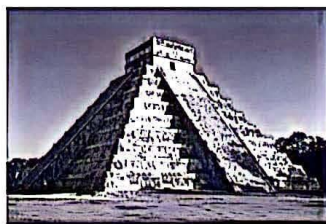
1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在试卷和答题卡指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案用0.5mm的黑色笔迹签字笔写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 集合  $A = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 1\}$ ,  $B = \{x | x \leq m\}$ , 若  $A \cup B = \mathbf{R}$ , 则实数  $m$  的取值范围为  
A.  $(-\infty, -1)$       B.  $[1, +\infty)$       C.  $(-\infty, -2)$       D.  $(-2, 1)$
2. 若复数  $z$  满足  $z^2 - 4z + 5 = 0$ , 则  $|z|$  的值为  
A.  $\sqrt{2}$       B.  $\sqrt{3}$       C.  $\sqrt{5}$       D.  $2\sqrt{2}$
3. 已知向量  $a$  和  $b$  的夹角的余弦值为  $\frac{1}{3}$ ,  $a = (-2\sqrt{2}, 1)$ ,  $|a - b| = \sqrt{17}$ , 则  $|b|$  等于  
A. 2      B. 4      C.  $3 - \sqrt{7}$       D.  $3 + \sqrt{7}$
4. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_4 = 2$ ,  $S_8 = 8$ , 则  $S_{16} =$   
A. 8      B. 26      C. 80      D. 54
5. 已知双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $P$  为双曲线  $E$  上的一点, 且  $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ$ , 射线  $P N$  平分  $\angle F_1 P F_2$ , 交  $x$  轴于点  $N$ , 若  $2\overline{F_1 N} = 3\overline{N F_2}$ , 则双曲线  $E$  的离心率为  
A.  $\frac{\sqrt{7}}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{19}}{2}$       C.  $\sqrt{7}$       D.  $\sqrt{19}$
6. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 以  $x$  轴作负半轴为始边, 角  $\alpha$  的终边与曲线  $x^2 + y^2 = 4$  相交于点  $P(x, y) (xy \neq 0)$ , 若  $\tan 2\alpha + \sin \alpha = 0$ , 则  $x - y^2$  的值为  
A.  $-1 - \sqrt{3}$       B.  $-1 + \sqrt{3}$       C.  $1 - \sqrt{3}$       D.  $1 + \sqrt{3}$

数学试题 第1页(共4页)

7. 如图,玛雅金字塔是世界上最大的金字塔之一,同埃及金字塔不同,它的每个侧面都是等腰梯形,并且梯形两腰延长得到的三角形是一个呈“金”字的等边三角形,它的底面是边长为56m的正方形,塔高为28m.该金字塔的体积约为( ) $m^3$ . (参考数据 $\sqrt{2} = 1.4, \sqrt{3} = 1.7$ )



- A. 120064      B. 40977      C. 34048      D. 31659

8. 已知函数 $f(x) = 2x - e + \ln \frac{ex}{e-x}$ ,若 $f\left(\frac{e}{2024}\right) + f\left(\frac{2e}{2024}\right) + \dots + f\left(\frac{2022e}{2024}\right) + f\left(\frac{2023e}{2024}\right) = \frac{2023}{2}(a+b)$ ,其中 $a > 0, b > 0$ ,则 $\frac{1}{2a} + \frac{a}{b}$ 的最小值为

- A. 3      B.  $\frac{5}{4}$       C. 2      D.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 关于函数 $f(x)$ 的描述有以下说法,其中正确的有
- A. 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续,若满足 $f(a) \cdot f(b) > 0$ ,则方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[a, b]$ 上可能有实根
- B. 若函数 $f(x)$ 的零点为 $x_0$ ,则函数 $f(x)$ 在点 $(x_0, 0)$ 两侧的函数值的符号一定不相同
- C. “二分法”判断函数零点所在区间的方法对连续不断的函数的所有零点都有效
- D. 连续函数相邻两个零点之间函数值保持同号
10. 若 $P$ 为抛物线 $y^2 = 4x$ 上的动点,焦点为 $F$ ,点 $B(4, 3)$ ,直线 $l: 2x - y + 3 = 0$ ,则下列说法正确的有
- A.  $|PB| + |PF|$ 的最小值为4
- B. 点 $P$ 到直线 $l$ 和 $y$ 轴的距离之和的最小值为 $\sqrt{5} - 1$
- C. 点 $P$ 到直线 $l$ 的距离的最小值为1
- D. 过 $F, B$ 两点的直线与抛物线相交的弦长为8
11. 某周周一到周六的夜间值班工作由甲、乙、丙三人负责,每人负责其中的两天,每天只需一人值班,则下列关于安排方法数的说法正确的有
- A. 共有90种安排方法
- B. 甲连续两天值班的安排方法有30种
- C. 甲连续两天值班且乙连续两天值班的安排方法有18种
- D. 甲、乙、丙三人每人都连续两天值夜班的安排方法有6种

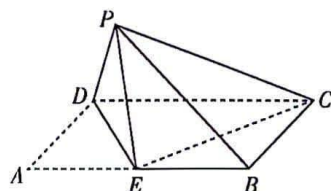
数学试题 第2页(共4页)

12. 函数  $f(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{4}) (\omega > 0)$ , 则以下说法正确的有
- A. 若  $\omega = 3$ , 则  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  内恰有 3 个零点
- B. 若  $\omega = 2$ , 则  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  内恰有 3 个极值点
- C. 若  $f(x)$  在  $[0, \frac{2\pi}{3}]$  内有最小值点, 则  $\omega \geq \frac{9}{8}$
- D. 若  $f(x)$  在区间  $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$  单调, 则  $\omega \in (0, \frac{3}{2}] \cup [\frac{9}{4}, \frac{7}{2}] \cup [\frac{21}{4}, \frac{11}{2}]$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 在某次大型人才招聘活动中, 共有 2000 人参加笔试, 笔试成绩位于区间  $[70, 80)$ ,  $[80, 90)$ ,  $[90, 100]$  的人数分别为 683, 272, 45, 已知此次笔试满分为 100 分, 且成绩近似服从正态分布, 则笔试成绩的标准差约为 ▲. (参考数据: 若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(\mu - 2\sigma \leq X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$ )
14. 函数  $f(x) = x(\ln x - ax) (a \in \mathbf{R}, x > 0)$  在定义区间内单调递减, 则实数  $a$  的取值范围是 ▲.
15. 在数列的每相邻两项之间插入此两项的积, 形成新的数列, 这样的操作称为该数列的一次“扩展”. 将数列 1, 3 进行“扩展”, 第一次得到数列 1, 3, 3; 第二次得到数列 1, 3, 3, 9, 3,  $\dots$ ; 第  $n$  次“扩展”后得到的数列为  $1, x_1, x_2, \dots, x_m, 3$ . 记  $a_n = \log_3(1 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m \cdot 3)$ , 其中  $m = 2^n - 1, n \in \mathbf{N}^*$ , 则数列  $\{a_n\}$  的第 6 项  $a_6 =$  ▲.

16. 在矩形  $ABCD$  中,  $AB=2AD=2$ ,  $E$  是  $AB$  的中点, 沿  $DE$  将  $\triangle ADE$  折起至  $\triangle PDE$ , 使得  $PB=PC$ , 则此时三棱锥  $P-DEC$  的外接球的表面积为 ▲.



第 16 题图

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  中, 若  $b_n = n + 3$ , 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  满足  $3S_n = a_n b_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.

(2) 若数列  $\{c_n\}$  满足  $c_n = \frac{1}{3a_n b_n}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .



18. (12分)

在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别是  $A, B, C$  的对边. 已知  $b - a = 1, \cos A = \frac{2}{3}$ ,     ▲    . 从

①  $c = 9$ , ②  $\cos B = \frac{11}{21}$ , 这两个条件中任选一个, 填在上面横线上作为已知条件, 解答

下面的问题.

(1) 求  $\triangle ABC$  的三边长及面积  $S$ ;

(2) 若角  $B$  的平分线交  $AC$  于点  $D$ , 求  $BD$  的长.

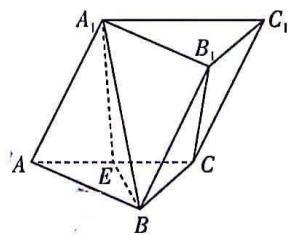
19. (12分)

如图, 已知三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$ ,  $E$  是  $AC$  的中点.

(1) 证明:  $B_1C \parallel$  平面  $A_1EB$ ;

(2) 平面  $A_1ACC_1 \perp$  平面  $ABC$ ,  $A_1A = AC$ ,  $\angle A_1AC = 60^\circ$ ,

$\angle ABC = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$ , 求平面  $A_1EB$  与平面  $B_1BC$  所成角的余弦值.



第 19 题图

20. (12分)

一盒乒乓球中共装有 2 只黄色球与 4 只白色球, 现从中随机抽取 3 次, 每次仅取 1 个球.

(1) 若每次抽取之后, 记录抽到乒乓球的颜色, 再将其放回盒中, 记抽到黄球的次数为随机变量  $X$ , 求  $P(X = 1)$  及  $E(X)$ ;

(2) 若每次抽取之后, 将抽到的乒乓球留在盒外, 记最终盒外的黄球个数为随机变量  $Y$ , 求  $P(Y = 1)$  及  $E(Y)$ ;

(3) 在 (1)(2) 的条件之下, 求  $P(|X - Y| \leq 1)$ .

21. (12分)

已知椭圆  $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 2)$ .

(1) 若椭圆  $E$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 直线  $y = 2x - 2$  与椭圆  $E$  交于  $M, N$  两点, 求证:  $OM \perp ON$ ;

(2)  $P$  为直线  $l: x = 4$  上的一个动点,  $A, B$  为椭圆  $E$  的左、右顶点,  $PA, PB$  分别与椭圆  $E$

交于  $C, D$  两点, 证明  $\frac{|CA| \cdot |PD|}{|PC| \cdot |BD|}$  为定值, 并求出此定值.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = m(x - 1)^2 - 2x + 2\ln x, m \geq 2$ .

(1) 求证: 函数  $f(x)$  存在单调递减区间, 并求出该函数单调递减区间  $(a, b)$  的长度  $b - a$  的取值范围;

(2) 当  $x \geq 1$  时,  $f(x) \leq 2xe^{x-1} - 4x$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

