2024 届高三年级 2 月份大联考

数学参考答案及解析

一、选择题

1. D 【解析】因为 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2\leqslant 5\}=\{x\in\mathbf{Z}\mid -\sqrt{5}\leqslant x\leqslant\sqrt{5}\}=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\left\{-3,-2,-1,0,\frac{1}{2},1\right\}$，所以 $A\cup B=\left\{-3,-2,-1,0,\frac{1}{2},1,2\right\}$中元素的个数为 7. 故选 D.

2. D 【解析】由余弦定理得 $BC^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times\frac{5}{6}=\frac{5}{3}$，所以 $BC=\frac{\sqrt{15}}{3}$. 故选 D.

3. B 【解析】$x_{19}=C_{20}^{19}(-2)^{19}=-20\times2^{19}$，所以 B 正确. 故选 B.

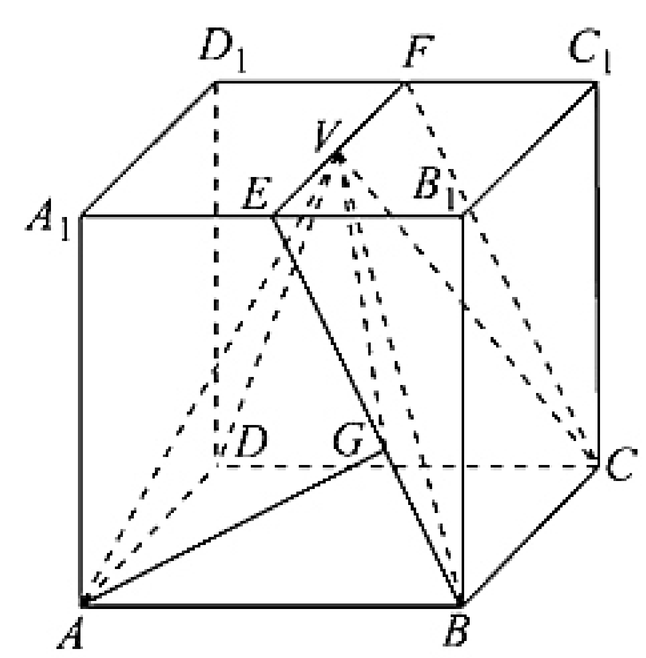
4. A 【解析】因为 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\alpha=2k\pi+\frac{4\pi}{3}$或 $\alpha=2k\pi+\frac{5\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，因为 $\alpha\in\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha=-\frac{2\pi}{3}$. 故选 A.

5. A 【解析】若 $\forall t\in\mathbf{R}$，当 $t>0$ 时，令 $t=x^2$，因为 $f(x^2)=-f(-x^2)$，所以 $f(t)=-f(-t)$，即 $f(-t)=-f(t)$；当 $t=0$ 时，令 $t=x^2=0$，因为 $f(x^2)=-f(-x^2)$，所以 $f(0)=-f(-0)$，即 $f(0)=0$；当 $t<0$ 时，令 $t=-x^2$，因为 $f(x^2)=-f(-x^2)$，所以 $f(-t)=-f(t)$，综上，$\forall t\in\mathbf{R}$，$f(-t)=-f(t)$，所以 $f(x)$是奇函数，所以 A 正确；若 $f(x)=x$，则 $f(x^2)=-f(-x^2)$成立，但 B、C、D 都不成立. 故选 A.

6. A 【解析】设 $P(x_0,y_0)$，$x_0>0$，$y_0>0$，所以 $R\left(\frac{x_0-2}{2},\frac{y_0}{2}\right)$，$x_0^2-y_0^2=4$，因为直线 OR 的斜率为 $\sqrt{5}$，所以 $\frac{y_0}{x_0-2}=\sqrt{5}$，化简得，$y_0=\sqrt{5}(x_0-2)$，与 $x_0^2-y_0^2=4$ 联立解得，$x_0=2$ 或 3，其中 $x_0=2$ 舍去，所以 P 点的坐标为 $(3,\sqrt{5})$，又 $F(2\sqrt{2},0)$，所以 $\triangle PAF$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{2}-(-2)}{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{10}+\sqrt{5}$. 故选 A.

7. C 【解析】记事件 E：在某次通电后 C、D 有且只有一个需要更换，事件 F：C 需要更换，则 $P(E)=0.2\times(1-0.1)+(1-0.2)\times0.1=0.26$，$P(EF)=0.2\times(1-0.1)=0.18$，由条件概率公式可得 $P(F|E)=\frac{P(EF)}{P(E)}=\frac{0.18}{0.26}=\frac{9}{13}$. 故选 C.

8. B 【解析】把正四棱锥 $V-ABCD$ 放入正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，则 V 是上底面的中心，取 A_1B_1 的中点 E，C_1D_1 的中点 F，连接 EF，BE，CF，由图可知，过 A 作 $AG\perp BE$，垂足为 G，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BC\perp$平面 ABB_1A_1，$AG\subset$平面 ABB_1A_1，所以 $BC\perp AG$，$BC\cap BE=B$，BC，$BE\subset$平面 $EFCB$，所以 $AG\perp$平面 $EFCB$，所以侧棱 VA 在平面 VBC 上的射影为 VG，由已知得，$AA_1=\sqrt{2}$，$EB=\sqrt{AA_1^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$，所以 $\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\cdot AG$，所以 $AG=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，所以 $VG=\sqrt{VA^2-AG^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.



二、选择题

9. AB 【解析】设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，因为 $z+\bar{z}=6$，所以 $2a=6$，所以 $a=3$. $|z|=|z-2i|\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(b-2)^2}$，解得 $b=1$，所以 $z=3+i$，所以 A，B 正确；$\frac{z}{3-i}=\frac{3+i}{3-i}=\frac{(3+i)^2}{(3-i)(3+i)}=\frac{8+6i}{10}=\frac{4+3i}{5}$，所以 C 错误；因为 z 对应的向量坐标为 $(3,1)$，所以 z 对应的向量与实轴正方向夹角的正切值为 $\frac{1}{3}$，所以 D 错误. 故选 AB.

10. ACD 【解析】A：当 $x=0$ 时，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，$\boldsymbol{c}=(0,2)$ 不共线，所以 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 可以作为一组基向量，由平面向量基本定理得，存在唯一的实数 p,q 使得 $\boldsymbol{a}=p\boldsymbol{b}+q\boldsymbol{c}$，所以 A 正确；B：若 $x=1$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(2,1)\cdot(1,2)=4\neq0$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$ 不成立，所以 B 错误；C：若 $x=4$，$\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{c}=(4,2)$，则 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$，所以 C 正确；D：若 $x=1$，则 $\boldsymbol{c}=(1,2)$，所以 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{-1}{2}\cdot(1,-1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，所以 D 正确. 故选 ACD.

11. ABD 【解析】设切点 $(x_0,x_0^2\ln x_0)$，则 $f'(x_0)=2x_0\ln x_0+x_0$，切线为 $y-x_0^2\ln x_0=(2x_0\ln x_0+x_0)(x-x_0)$，代入 (a,b) 整理得 $(2x_0\ln x_0+x_0)a-x_0^2\ln x_0-x_0^2-b=0$，令 $g(x)=(2x\ln x+x)a-x^2\ln x-x^2-b$，$g'(x)=(2\ln x+3)a-2x\ln x-3x=(2\ln x+3)\cdot(a-x)$，令 $g'(x)=0$ 得 $x_1=a$，$x_2=e^{-\frac{3}{2}}$. 当 $a\leqslant0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,e^{-\frac{3}{2}})$ 上单调递增，在 $(e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$ 上单调递减，$g(e^{-\frac{3}{2}})=-2a\cdot e^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\cdot e^{-3}-b$，$g(x)$ 至多有 2 个零点，故 A 正确；当 $a\in(0,e^{-\frac{3}{2}})$ 时，$g(x)$ 在 $(0,a)$，$(e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$ 上单调递减，在 $(a,e^{-\frac{3}{2}})$ 上单调递增，$g(a)=a^2\ln a-b$，$g(e^{-\frac{3}{2}})=-2ae^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\cdot e^{-3}-b$，当 $b=a^2\ln a$ 时，$g(a)=0$，且 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，所以 $n=2$，B 正确；若 $n=3$，则 $g(a)<0<g(e^{-\frac{3}{2}})$，即 $a^2\ln a<b<-2ae^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}e^{-3}$，同理当 $a>e^{-\frac{3}{2}}$ 时，$g(e^{-\frac{3}{2}})<0<g(a)$，即 $-2ae^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}e^{-3}<b<a^2\ln a$，C 错误；②$a=e^{-\frac{3}{2}}$ 时，$g'(x)\leqslant0$，$g(x)$ 单调递减；又 $x\to0$ 时，$g(x)\to-b$，$x\to+\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，则当 $-b>0$ 时，$g(x)$ 有 1 个零点，即 $b<0$，D 正确. 故选 ABD.

三、填空题

12. $32\sqrt{3}$ 【解析】设该正四棱台的高、斜高分别为 h，h'，由已知得，$\frac{h}{3}(2^2+6^2+2\times6)=\frac{104\sqrt{2}}{3}$，所以 $h=2\sqrt{2}$，$h'=\sqrt{h^2+\left(\frac{6-2}{2}\right)^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+\left(\frac{6-2}{2}\right)^2}=2\sqrt{3}$，所以正四棱台侧面积为 $S=4\times\frac{(2+6)\times2\sqrt{3}}{2}=32\sqrt{3}$. 故答案为 $32\sqrt{3}$.

13. $a_n=3^n-2(n-1)$ 【解析】因为 $a_{n+1}=3a_n+4n-6(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_{n+1}+2n=3a_n+4n-6+2n=3[a_n+2(n-1)]$，因为 $a_1=3$，所以 $a_1+2\times(1-1)=3$，所以 $a_n+2(n-1)=3\cdot3^{n-1}=3^n$，所以 $a_n=3^n-2(n-1)$. 故答案为 $a_n=3^n-2(n-1)$.

14. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】抛物线 $\Gamma:y=\frac{x^2}{6}$ 的焦点为 $A\left(0,\frac{3}{2}\right)$，准线 l 为 $y=-\frac{3}{2}$，依题意不妨令 C 在第一象限，$C\left(a,\frac{3}{2}\right)$，则圆 C 的半径 $r=a$，设 $B\left(x_0,\frac{1}{6}x_0^2\right)(x_0>0)$，则圆 C 的方程为 $(x-a)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=a^2$，由 $y=\frac{1}{6}x^2$，则 $y'=\frac{1}{3}x$，所以抛物线在点 B 处的切线 m 的斜率 $k=\frac{x_0}{3}$，因为圆 C 与抛物线 $\Gamma:y=\frac{x^2}{6}$ 在公

共点 B 处有相同的切线，所以直线 CB 与 m 垂直，所以 $\frac{\frac{1}{6}x_0^2-\frac{3}{2}}{x_0-a}\cdot\frac{x_0}{3}=-1$，则 $a=\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{18}x_0^3$ ①，

又点 B 在圆 C 上，所以 $(x_0-a)^2+\left(\frac{1}{6}x_0^2-\frac{3}{2}\right)^2=a^2$，则 $x_0^2-2ax_0+\left(\frac{1}{6}x_0^2-\frac{3}{2}\right)^2=0$ ②，所以 $x_0^2-2\left(\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{18}x_0^3\right)x_0+\left(\frac{1}{6}x_0^2-\frac{3}{2}\right)^2=0$，整理可得 $x_0^4+6x_0^2-27=0$，解得，$x_0^2=3$ 或 $x_0^2=-9$（舍去），所以 $r=a=\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{18}x_0^3=\frac{2}{\sqrt{3}}$，$y_B=\frac{1}{6}x_0^2=\frac{1}{2}$，

所以 $|AB|=2$，所以 $\sin\frac{\angle ACB}{2}=\frac{\frac{|AB|}{2}}{|AC|}=\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故答案为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

四、解答题

15. **解**：(1) 因为 $X\sim N(45,225)$，所以 $\sigma=15$，（1 分）

则 $P(X\geqslant 60)=P(X\geqslant \mu+\sigma)=\frac{1-0.6827}{2}=0.15865$，（4 分）

所以现场年龄不低于 60 岁的人数大约为 $1000\times 0.15865\approx 159$（人）.（6 分）

(2) 依题意可得，$P(n)=C_{20}^{n}0.4^{n}\times 0.6^{20-n}$，（7 分）

设 $\begin{cases}P(n)\geqslant P(n+1)\\P(n)\geqslant P(n-1)\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}C_{20}^{n}0.4^{n}\times 0.6^{20-n}\geqslant C_{20}^{n+1}0.4^{n+1}\times 0.6^{19-n}\\C_{20}^{n}0.4^{n}\times 0.6^{20-n}\geqslant C_{20}^{n-1}0.4^{n-1}\times 0.6^{21-n}\end{cases}$，（9 分）

所以 $\begin{cases}\frac{20-n}{n+1}\cdot\frac{0.4}{0.6}\leqslant 1,\\\frac{21-n}{n}\cdot\frac{0.4}{0.6}\geqslant 1,\end{cases}$（11 分）

所以 $\frac{37}{5}\leqslant n\leqslant\frac{42}{5}$，（12 分）

n 为整数，所以 $n=8$，

所以当 $P(n)$ 取得最大值时 n 的值为 8.（13 分）

16. **解**：(1) 因为 $\angle COF=\angle EFO$，所以 $EF/\!/CO$，（1 分）

因为 $EF\not\subset$ 平面 SCO，$CO\subset$ 平面 SCO，

所以 $EF/\!/$ 平面 SCO，（2 分）

因为 DE 垂直底面于 E，SO 垂直底面于 O，所以 $DE/\!/SO$，

同理 $DE/\!/$ 平面 SCO，（3 分）

因为 $DE\cap EF=E$，且 $EF/\!/$ 平面 SCO，$DE/\!/$ 平面 SCO，所以平面 $SCO/\!/$ 平面 DEF.（5 分）

(2) 设圆锥的底面半径为 2，

因为轴截面 SAB 是正三角形，所以 $SO=2\sqrt{3}$，（6 分）

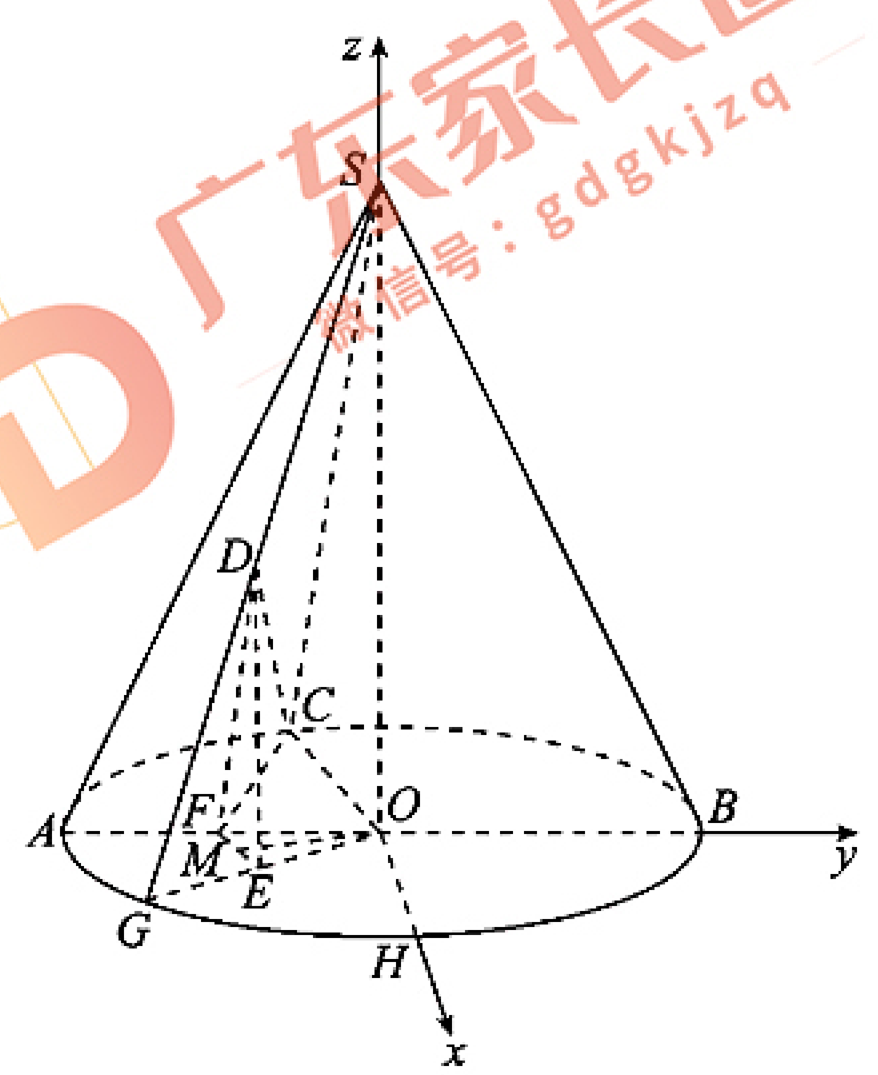
如图，设平面 $SDEO$ 与底面圆周交于 G，

因为 $\triangle EFO$ 为正三角形，且 F 为 AO 的中点，

所以 $OF=FE=EO=1$，所以 E 为 OG 的中点，

所以 DE 为 $\triangle SOG$ 的中位线，所以 $DE=\frac{1}{2}SO=\sqrt{3}$，（7 分）

如图，在底面圆周上取一点 H，使得 $OH\perp OB$，以直线 OH，OB，OS 为 x，y，z 轴建立空间坐标系，（8 分）



由已知得，$C(-\sqrt{3},-1,0)$，$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$，$E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，$F(0,-1,0)$，（9 分）

设 EF 的中点为 M，则平面 DEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\overrightarrow{OM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4},0\right)$，（11 分）

所以 $\overrightarrow{CF}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{CD}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$，

设平面 CDF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，

所以 $\begin{cases}\sqrt{3}x=0,\\ \frac{3\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

$x=0$，令 $y=2$，则 $z=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

则 $\boldsymbol{n}_2=\left(0,2,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，（13 分）

所以平面 CDF 与平面 DEF 夹角的余弦值为

$$\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}.$$（15 分）

17. **解**：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}+(2x-3)=\frac{2x^2-3x+1}{x}$，（2 分）

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=1$，（3 分）

$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$，$f'(x)>0$；$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$.（5 分）

(2) $f'(x)=\frac{2ax^2-3ax+1}{x}$，

由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的极值点 x_1,x_2 得，$2ax^2-3ax+1=0$ 有两个不同的正根，

则 $\begin{cases}2a\neq0\\ x_1+x_2=\frac{3}{2}>0\\ x_1x_2=\frac{1}{2a}>0\\ \Delta=9a^2-8a>0\end{cases}$，解得 $a>\frac{8}{9}$，（7 分）

因为 $f(x_1)+f(x_2)=\ln(x_1x_2)+a(x_1^2+x_2^2)-3a(x_1+x_2)+4a=\ln(x_1x_2)+a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-3a(x_1+x_2)+4a=-\ln(2a)+\frac{7}{4}a-1$，（9 分）

设 $g(a)=-\ln(2a)+\frac{7}{4}a-1$，$a>\frac{8}{9}$，

则 $g'(a)=\frac{7}{4}-\frac{1}{a}=\frac{7a-4}{4a}>0$，

故 $g(a)$ 在 $\left(\frac{8}{9},+\infty\right)$ 上单调递增，（12 分）

又 $g(a)>g\left(\frac{8}{9}\right)=-\ln\frac{16}{9}+\frac{5}{9}=\frac{5}{9}+\ln\frac{9}{16}$，

故 $f(x_1)+f(x_2)>\frac{5}{9}+\ln\frac{9}{16}$.（15 分）

18. **解**：(1) 因为 $C_1(-1,0)$，$C_2(1,0)$，$P(x,y)$，$4\overrightarrow{C_1P}\cdot\overrightarrow{C_2P}=3x^2$，

所以 $4(x+1,y)\cdot(x-1,y)=3x^2$，（1 分）

所以 $4(x^2-1+y^2)=3x^2$，化简得 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

所以 P 的轨迹 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.（3 分）

(2) ①因为直线 l 不过坐标原点且不垂直于坐标轴，

所以 $x_0y_0\neq0$.

设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

所以 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$，

由题意得，$\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1\\ \frac{x_2^2}{4}+y_2^2=1\end{cases}$，

相减得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{4}+y_1^2-y_2^2=0$，（4 分）

所以 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，

所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{2y_0}{2x_0}=-\frac{1}{4}$，

所以 $k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{1}{4}$，

所以 $k_l=k_{AB}=-\frac{1}{4k_{OM}}=-\frac{x_0}{4y_0}$，（5 分）

广东家长圈 微信号：gdgkjzq

同理得，$k_{ON}\cdot k_{DE}=-\frac{1}{4}$，又 $k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{1}{4}$，

相乘得，$k_{ON}\cdot k_{DE}\cdot k_{AB}\cdot k_{OM}=\left(-\frac{1}{4}\right)^2$．（6分）

因为 $k_{DE}\cdot k_{AB}=-1$，$k_{OM}=\frac{y_0}{x_0}$，所以 $k_{ON}=-\frac{x_0}{16y_0}$，（7分）

因为 $x_0\neq 0$，所以 $-\frac{x_0}{4y_0}\neq-\frac{x_0}{16y_0}$，所以 $k_l\neq k_{ON}$，（8分）

所以 l 与 ON 相交．（9分）

②l 的方程为 $y-y_0=-\frac{x_0}{4y_0}(x-x_0)$，直线 DE 的方程为 $y-y_0=\frac{4y_0}{x_0}(x-x_0)$，

直线 ON 的方程为 $y=-\frac{x_0}{16y_0}x$，

联立得，$y_T=-\frac{x_0^2+4y_0^2}{12y_0}$，$y_N=\frac{-3x_0^2y_0}{x_0^2+64y_0^2}$，（11分）

故 $|\lambda|=\frac{|ON|}{|NT|}=\frac{|ON|}{|OT|-|ON|}=\frac{1}{\frac{|OT|}{|ON|}-1}$，（12分）

又 $\frac{|OT|}{|ON|}=\left|\frac{y_T}{y_N}\right|=\left|\frac{-\frac{x_0^2+4y_0^2}{12y_0}}{\frac{-3x_0^2y_0}{x_0^2+64y_0^2}}\right|$

$=\frac{1}{36}\cdot\frac{(x_0^2+4y_0^2)(x_0^2+64y_0^2)}{x_0^2y_0^2}$

$=\frac{1}{36}\cdot\frac{\left(1+4\frac{y_0^2}{x_0^2}\right)\left(1+64\frac{y_0^2}{x_0^2}\right)}{\frac{y_0^2}{x_0^2}}$

$=\frac{1}{36}\left(256\frac{y_0^2}{x_0^2}+\frac{x_0^2}{y_0^2}+68\right)\geq\frac{25}{9}$．（14分）

当且仅当 $x_0^2=16y_0^2$ 即 $x_0=\pm 4y_0$ 时取等号，

又 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2<1$，即当且仅当 $\begin{cases}x_0=\pm 4y_0,\\ -\frac{\sqrt{5}}{5}<y_0<\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$ 时取等号，

所以 $|\lambda|=\frac{1}{\frac{|OT|}{|ON|}-1}\leq\frac{9}{16}$，故 $|\lambda|$ 的最大值为 $\frac{9}{16}$．（17分）

19．**解**：(1)不是的．（1分）

如等差数列 $\left\{-\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2},-2,\cdots\right\}$，$T_2=a_1a_2=\frac{1}{2}\notin\left\{-\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2},-2,\cdots\right\}$，（2分）

所以不是任意一个无穷等差数列对前 n 项之积是封闭的．（3分）

(2)$\{a_n\}$是等比数列，其首项 $a_1=2$，公比 q，

所以 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2q^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $T_n=a_1a_2\cdots a_n=2^nq^{1+2+\cdots+(n-1)}=2^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}$，（4分）

由已知得，对任意正整数 n，总存在正整数 m，使得 $T_n=a_m$ 成立，

即对任意正整数 n，总存在正整数 m，

使得 $2^nq^{\frac{(n-1)n}{2}}=2q^{m-1}$成立，

即对任意正整数 n，总存在正整数 m，使得 $q^{\frac{(n-1)n}{2}-(m-1)}=2^{1-n}$成立，（5分）

①当 $m=\frac{(n+1)n}{2}\geq 1$ 时，得 $\frac{(n-1)n}{2}-(m-1)=1-n$，所以 $q=2$；（7分）

②当 $m=\frac{(n-1)n}{2}+(2-n)=\frac{n^2-3n+4}{2}\geq 1$ 时，得 $\left[\frac{(n-1)n}{2}-(m-1)\right]+(1-n)=0$，且 $q=\frac{1}{2}$，

综上，$q=2$ 或 $\frac{1}{2}$．[答案正确即可]（9分）

(3)对任意的无穷等比数列$\{a_n\}$，$a_n=a_1q^{n-1}=a_1^n\cdot\left(\frac{q}{a_1}\right)^{n-1}$，

令 $b_n=a_1^n$，$c_n=\left(\frac{q}{a_1}\right)^{n-1}$，则 $a_n=b_n\cdot c_n(n\in\mathbf{N}^*)$，（11分）

下面证明：$\{b_n\}$是对前 n 项之积是封闭的．

因为 $b_n=a_1^n$，所以 $T_n=a_1^{1+2+\cdots+n}=a_1^{\frac{n(n+1)}{2}}$，（12 分）

取正整数 $m=\frac{n(n+1)}{2}$ 得，$T_n=b_m$，（13 分）

所以 $\{b_n\}$ 对前 n 项之积是封闭的，（14 分）

同理证明：$\{c_n\}$ 也对前 n 项之积是封闭的，（16 分）

所以对任意的无穷等比数列 $\{a_n\}$，总存在两个无穷数列 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$，使得 $a_n=b_n\cdot c_n(n\in\mathbf{N}^*)$，其中 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 对前 n 项之积都是封闭的.（17 分）

广东家长圈 微信号：gdgkjzq