华附、省实、广雅、深中 2024 届高三四校联考

数学参考答案及评分标准

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	C	B	B	A	B	A	D	BD	BC	ABD	ACD

13. $y=\pm\frac{1}{2}x$　　14. -2　　15. $[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$　　16. $\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$

1.【解析】解：因为集合A，B满足$A\subseteq(A\cap B)$，故可得$A\subseteq B$，故选：D．

2.【解析】解：由已知 $\bar{z}=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i$，所以 z= i，$z^{2024}=i^{2024}==i^4=1$故选 C

3.【解析】解：结合图像可知所求直线斜率小于-1，故选B

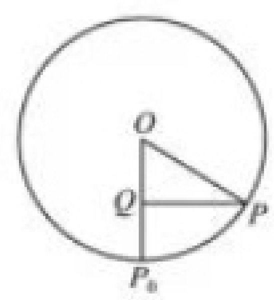
4.【解析】解：由题意 $\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}=\sqrt{2}$，$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}=1$，即 $|\vec{a}|=\sqrt{2}|\vec{b}|$，由$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=0$，

即 $4|\vec{b}|^2-\sqrt{2}|\vec{b}|^2\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle-3|\vec{b}|^2=0$，由题知，$|\vec{b}|\neq0$，$\therefore\sqrt{2}\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=1$

$\because\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\in[0,\pi]$，$\therefore$所求夹角为$\frac{\pi}{4}$　　故选 B

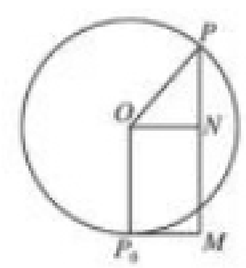
5.【解析】解：因为椭圆Γ_1的离心率$e_1=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{1}{2}$，所以$4b^2=3a^2$，所以双曲线$\Gamma_2$的离心率$e_2=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$．故选 A

6.【解析】解：当列车行驶的距离为 s 时，则车轮转过的角度所对应的扇形弧长为 s，



$\therefore$车轮转过的角度为$\frac{S}{R}$，P 点的初始位置为 P_0，设车轮的中心为 O，当$\frac{S}{R}\in(0,\frac{\pi}{2})$时，作 $PQ\perp OP_0$，垂足为 Q，如右图所示，

则 $OQ=OP\cdot\cos\frac{S}{R}=R\cos\frac{S}{R}$，$\therefore P$ 到铁轨表面的距离为$P_0Q=R-R\cdot\cos\frac{S}{R}=R(1-\cos\frac{S}{R})$；

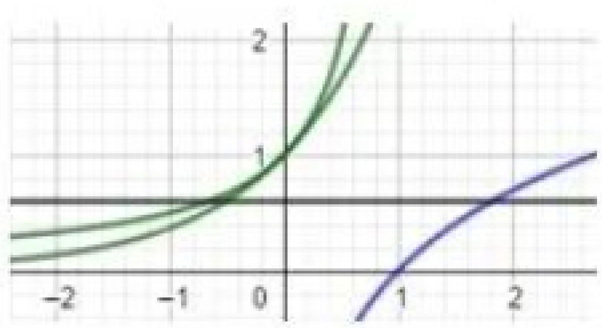


当$\frac{S}{R}\in(\frac{\pi}{2},\pi)$时，$PM\perp MP_0$，作 $ON\perp PM$，垂足为 N，如右图所示，

则 $PN=OP\cdot\sin(\frac{S}{R}-\frac{\pi}{2})=-R\cos\frac{S}{R}$，

$\therefore P$ 到铁轨表面的距离为$PM=R-R\cos\frac{S}{R}=R(1-\cos\frac{S}{R})$；当$\frac{S}{R}$在其它范围均可得到同一个式子，故选 B.

7.【解析】解：结合函数 $y=e^x, y=\ln x, y=\frac{1}{1-x}$ 图像，可知 $c\leq a<b$，故选 A



8. 【解析】解：由已知得：$\dfrac{1}{a_n}=4+\dfrac{4}{\sqrt{a_{n-1}}}+\dfrac{n}{2a_{n-1}}=(\dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}}+2)^2+\dfrac{n-2}{2a_{n-1}}\geq(\dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}}+2)^2$，

$\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}\geq\dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}}+2$，故 $\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}\geq 2n-1$，$a_n\leq\dfrac{1}{(2n-1)^2}<\dfrac{1}{(2n-1)(2n-3)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{(2n-3)}-\dfrac{1}{(2n-1)})$

$a_1<S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2(2n-1)}<\dfrac{3}{2}$ 故选 D

9. 【解析】解：A.：$c>d$不一定$c^2>d^2$所以 A 错，对于选项 B：两边同时除以c^2即可，B 正确，

C 选项$ab>1$不一定$a>1,b>1$，反之成立，所以为必要不充分条件

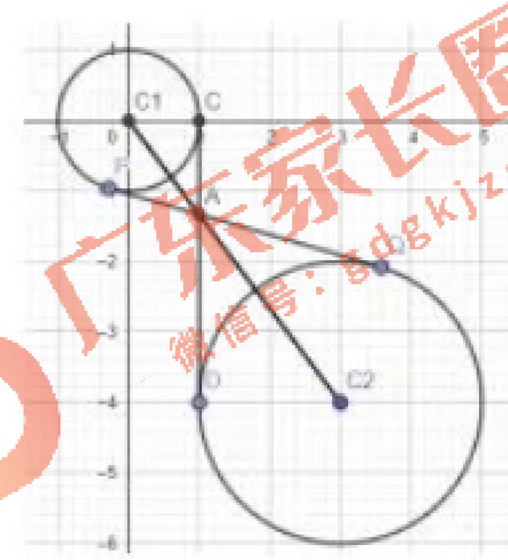
D.选项正确：$\log_a b=\dfrac{\ln b}{\ln a}<\dfrac{\ln b+\ln\dfrac{a+1}{a}}{\ln a+\ln\dfrac{a+1}{a}}=\dfrac{\ln\dfrac{ab+b}{a}}{\ln a+1}<\dfrac{\ln\dfrac{ab+a}{a}}{\ln(a+1)}=\dfrac{\ln(b+1)}{\ln(a+1)}=\log_{a+1}(b+1)$

10. 【解析】解：当两圆内含时，r 可以无穷大所以 A 不正确；当 r=5 时两圆相交，两圆的方程作差可以公共弦的直线方程 B 为正确选项；当 r=2 时如图一，PQ 和 CD 为两条内公切线，有半径比可知 CA=$\dfrac{4}{3}$，可得 $\tan\angle C_1AC=\dfrac{3}{4}$，$\tan\angle PAC=\dfrac{2\tan\angle C_1AC}{1-\tan^2\angle C_1AC}=\dfrac{24}{7}$，$k_{PQ}=-\dfrac{1}{\tan\angle PAC}=-\dfrac{7}{24}$，C 选项正确

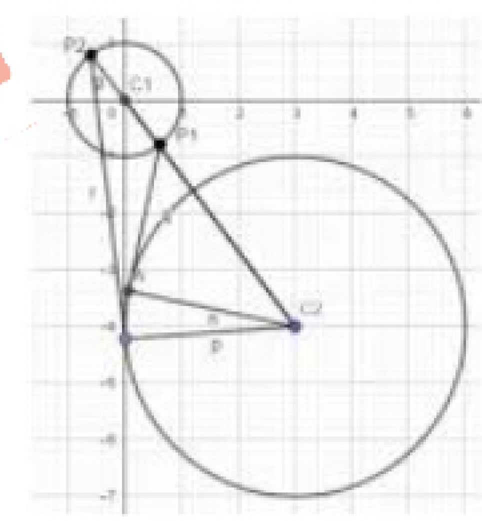
对于 D 选项，点 P 在 P1 位置时 $P_1C_2=4<3\sqrt{2},\angle AP_1C_2>\dfrac{\pi}{4}$

点 P 在 P2 位置时 $P_2C_2=6>3\sqrt{2},\angle BP_2C_2<\dfrac{\pi}{4}$

所以中间必然有位置使得 $\angle BPA=\dfrac{\pi}{2}$ 故选 BC



图一



图二

11. 【解析】解：A. 因为$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，

所以$f(x)$在$(-\infty,0)$和$(2,+\infty)$上单调递增，在$(0,2)$上单调递减，且$f(0)=0$，$f(2)=-4$，

所以，当$f(x)=b$有三个不同的实数根x_1，x_2，x_3时，$-4<b<0$，故 A 正确

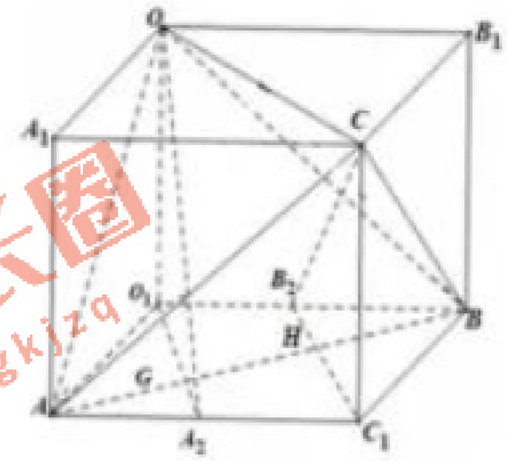
$y=f(x)-1$关于点$(1,-3)$中心对称，在此点处的切线方程为$y=-3x$，所以 B 正确

由于方程$f(x)=kx+b$有三个根x_1，x_2，x_3，所以$x^3-3x^2-kx-b=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

展开可知$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-k$，C 不正确

$x_1+x_2+x_3=3$，当x_1，x_2，x_3成等差数列时$x_1+x_2+x_3=3x_2$，所以$x_2=1$，$k+b=-2$，D 正确

12.【解析】解：如图：



对于A，因为点P满足$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$且$x+y+z=1$，

可知点P是平面ABC上的一点．

又因为正四面体$O-ABC$是棱长为3，所在立方体的棱长$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$|\overrightarrow{OP}|$的最小值为点O到平面ABC的距离，即为立方体体对角线的$\frac{2}{3}$，计算可知 A 正确；

对于 B，因为正四面体$O-ABC$的体积为立方体的体积减去四个小三棱锥的体积：$\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^3-$

$4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2}\sqrt{2})^3=\frac{9\sqrt{2}}{4}$，而正四面体$O-ABC$四个面的面积都是$\frac{\sqrt{3}}{4}\times3^2=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，

设正四面体$O-ABC$的内切球半径为r，$4\times\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{3}}{4}r=\frac{9\sqrt{2}}{4}$，解得$2r=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

因为正四面体$Q-DEF$在正四面体$O-ABC$的内部，且可以任意转动，

所以最大正四面体$Q-DEF$外接球直径为$\frac{\sqrt{6}}{2}$，因此最大正四面体$Q-DEF$外接球也是棱长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的正方体的外接球，

所以正四面体$Q-DEF$的体积最大值为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-4\times\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{6}=\frac{\sqrt{2}}{12}<\frac{\sqrt{2}}{10}$，故 B 不正确．

对于C，在正方体$AC_1BO_1-A_1CB_1O$内，过O作平面OO_1A_2，分别交AB、AC_1于点G、A_2，过C作平面CC_1B_2，分别交AB、BO_1于点H、B_2，且平面OO_1A_2//平面CC_1B_2，

由正四面体$O-ABC$的四个顶点分别在四个互相平行的平面内，且每相邻平行平面间的距离均相等，

其中平面OO_1A_2和平面CC_1B_2为中间的两个平面，易知A_2为AC_1的中点，B_2为O_1B的中点，

因为正方体$AC_1BO_1-A_1CB_1O$是棱长为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以$O_1A=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$AA_2=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，$O_1A_2=\sqrt{(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{3\sqrt{2}}{4})^2}=\frac{3\sqrt{10}}{4}$，

所以点A到O_1A_2的距离为$\frac{|O_1A|\cdot|AA_2|}{|O_1A_2|}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，所以每相邻平行平面间的距离为$\frac{3\sqrt{10}}{10}$，故 C 正确；

对于 D 选项：由$|QO|=2|QA|$可知点Q的轨迹是平面ABC与以 M 点为球心，2 为半径的球的截面圆

其中M点在OA的延长线上且MA=1，M点到平面ABC的距离为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，截面圆的半径为$\sqrt{(2)^2-(\frac{\sqrt{6}}{3})^2}=\frac{\sqrt{30}}{3}$

所以截面圆周长为$\frac{2\sqrt{30}}{3}\pi$，故选 ACD

13. 【解析】解：渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$

14. 【解析】解：$S_n=n(n-3)$，S_n最小值为-2

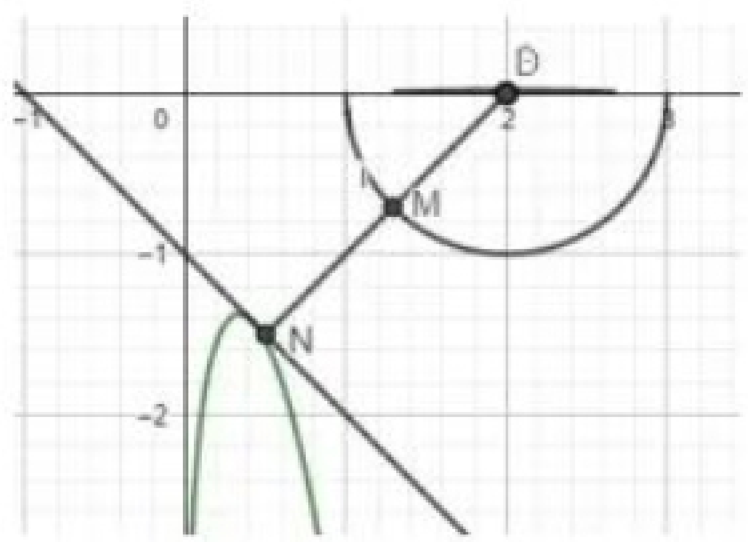
15. 【解析】解：由 $f(x)=\sin^2(\omega x-\frac{\pi}{3})=\frac{1-\cos(2\omega x-\frac{2\pi}{3})}{2}$ 的最小正周期为2π，得$\omega=\frac{1}{2}$.

$f(x)=\frac{1-\cos(x-\frac{2\pi}{3})}{2}=\frac{\cos(x+\frac{\pi}{3})+1}{2}$，根据图像可知，函数$f(x)$在$[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$上单调递减，在$[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}]$上

单调递增，若$f(x)$在$[0,m]$上单调递减，在$[2m,\frac{5\pi}{3}]$上单调递增，则$\begin{cases}0<m\leqslant\frac{2\pi}{3}\\ \frac{2\pi}{3}\leqslant 2m<\frac{5\pi}{3}\end{cases}$，解得$m\in[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$

16. 【解析】解：$g(x)=\ln(ax)-axe^x=\ln(ax)-e^{x+\ln(ax)}\leqslant\ln(ax)-(x+\ln(ax)+1)=-x-1$

由$y=f(x)=-\sqrt{-x^2+4x-3}$,整理得$(x-2)^2+y^2=1(y\leqslant 0)$,数形结合可知 MN 最小值为圆心到直线 $y=-x-1$的距离减去半径，即为$\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$



当且仅当$\begin{cases}x+\ln(ax)=0\\ y=x-2\\ y=-x-1\end{cases}$ 即$\begin{cases}a=2e^{-\frac{1}{2}}\\ x=\frac{1}{2}\\ y=-\frac{3}{2}\end{cases}$ 时取到最值.

17. (本小题10分)

解：

（1）由已知：$S_1+\frac{S_2}{2}+\cdots+\frac{S_n}{n}=n\cdot 2^n$　当 $n\geqslant 2$ 时 $S_1+\frac{S_2}{2}+\cdots+\frac{S_{n-1}}{n-1}=(n-1)\cdot 2^{n-1}$　------1

两式相减可得：$S_n=n(n+1)\cdot 2^{n-1}$，$n\geqslant 2$，　------2

又 $n=1$ 时，$S_1=a_1=2$ 满足上式，

所以 $S_n=n(n+1)\cdot 2^{n-1}$　$n\geqslant 1$　------3

$S_{n-1}=n(n-1)\cdot 2^{n-2}$　$n\geqslant 2$

$a_n=S_n-S_{n-1}=n(n+3)2^{n-2}$，$n\geqslant 2$，　------4

又 $n=1$ 时，$a_1=2$ 满足上式，

则 $a_n=n(n+3)2^{n-2}$；　------5

（2）由（1）可得：$\dfrac{a_n}{n}=(n+3)2^{n-2}$，　　------6

则 $T_n=4\cdot 2^{-1}+5\cdot 2^{0}+\ldots+(n+3)\cdot 2^{n-2}$，　------7

即 $2T_n=4\cdot 2^{0}+5\cdot 2^{1}+\ldots+(n+3)\cdot 2^{n-1}$，　------8

两式相减可得：$-T_n=2+2^0+2^1+\ldots+2^{n-2}-(n+3)\cdot 2^{n-1}=2+\dfrac{1-2^{n-1}}{1-2}-(n+3)\cdot 2^{n-1}$，　------9

即 $T_n=(n+2)\cdot 2^{n-1}-1$.　　------10

18. 解：记A_i表示事件“第i次抽到代数题”，$i=1,2,\cdots,9$.

(1)由条件概率公式可得$P(A_2|\overline{A_1})=\dfrac{p(\overline{A_1}A_2)}{p(\overline{A_1})}$　　----------1

$$=\dfrac{\dfrac{C_5^1\cdot C_4^1}{A_9^2}}{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{\dfrac{5\times 4}{9\times 8}}{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{1}{2}$$　　---------3

所以第一次抽到几何题的条件下，第二次抽到代数题的概率为$\frac{1}{2}$;　---------4

（也可以：已知第一次抽到几何题，这时还剩余代数题和几何题各四道，因此$P(A_2|\overline{A_1})=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$）

(2)由题意，随机变量X 的可能取值为：0, 1, 2, 3, 4;　---------5

$P(X=0)=\dfrac{C_5^4C_4^0}{C_9^4}=\dfrac{5}{126}$　　　$P(X=1)=\dfrac{C_5^3C_4^1}{C_9^4}=\dfrac{40}{126}=\dfrac{20}{63}$

$P(X=2)=\dfrac{C_5^2C_4^2}{C_9^4}=\dfrac{60}{126}=\dfrac{10}{21}$　　　$P(X=3)=\dfrac{C_5^1C_4^3}{C_9^4}=\dfrac{20}{126}=\dfrac{10}{63}$

$P(X=4)=\dfrac{C_5^0C_4^4}{C_9^4}=\dfrac{1}{126}$　　　(每个 1 分)---------10

X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{5}{126}$	$\frac{20}{63}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{63}$	$\frac{1}{126}$

-----11

所以：$E(X)=0\times\dfrac{5}{126}+1\times\dfrac{20}{63}+2\times\dfrac{10}{21}+3\times\dfrac{20}{63}+4\times\dfrac{1}{126}=\dfrac{16}{9}$　　----12

（2）由（1）可得：$\frac{a_n}{n}=(n+3)2^{n-2}$， ------6

则 $T_n=4\cdot2^{-1}+5\cdot2^{0}+\dots+(n+3)\cdot2^{n-2}$， ------7

即 $2T_n=4\cdot2^{0}+5\cdot2^{1}+\dots+(n+3)\cdot2^{n-1}$， ------8

两式相减可得：$-T_n=2+2^{0}+2^{1}+\dots+2^{n-2}-(n+3)\cdot2^{n-1}=2+\frac{1-2^{n-1}}{1-2}-(n+3)\cdot2^{n-1}$， ------9

即 $T_n=(n+2)\cdot2^{n-1}-1$. ------10

18. 解：记A_i表示事件“第i次抽到代数题”，$i=1,2,\cdots,9$.

(1)由条件概率公式可得$P(A_2|\overline{A_1})=\frac{p(\overline{A_1}A_2)}{p(\overline{A_1})}$ ---------1

$$=\frac{\frac{C_5^1\cdot C_4^1}{A_9^2}}{\frac{5}{9}}=\frac{\frac{5\times4}{9\times8}}{\frac{5}{9}}=\frac{1}{2}$$ ---------3

所以第一次抽到几何题的条件下，第二次抽到代数题的概率为$\frac{1}{2}$； ---------4

（也可以：已知第一次抽到几何题，这时还剩余代数题和几何题各四道，因此$P(A_2|\overline{A_1})=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$）

(2)由题意，随机变量X 的可能取值为：0, 1, 2, 3, 4； ---------5

$P(X=0)=\frac{C_5^4C_4^0}{C_9^4}=\frac{5}{126}$　　$P(X=1)=\frac{C_5^3C_4^1}{C_9^4}=\frac{40}{126}=\frac{20}{63}$

$P(X=2)=\frac{C_5^2C_4^2}{C_9^4}=\frac{60}{126}=\frac{10}{21}$　　$P(X=3)=\frac{C_5^1C_4^3}{C_9^4}=\frac{20}{126}=\frac{10}{63}$

$P(X=4)=\frac{C_5^0C_4^4}{C_9^4}=\frac{1}{126}$ （每个 1 分）---------10

X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{5}{126}$	$\frac{20}{63}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{63}$	$\frac{1}{126}$

-----11

所以：$E(X)=0\times\frac{5}{126}+1\times\frac{20}{63}+2\times\frac{10}{21}+3\times\frac{20}{63}+4\times\frac{1}{126}=\frac{16}{9}$ ——-12

19. 解：(1)$f'(x)=a(x+1)e^{x}$，$a\neq 0$ ------1

当$a>0$时， $x\in(-\infty,-1)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减;

$x\in(-1,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增; ------2

当$a<0$时， $x\in(-\infty,-1)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增;

$x\in(-1,+\infty)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减. ------3

综上所述：当$a>0$时，$f(x)$增区间为$(-1,+\infty)$，减区间为$(-\infty,-1)$

当 $a<0$时，$f(x)$增区间为$(-\infty,-1)$，减区间为$(-1,+\infty)$ ------4

(2)$y=f(x)$在点$(x_1，y_1)$处的切线方程为

$y=a(x_1+1)e^{x_1}(x-x_1)+ax_1e^{x_1}$,即 $y=a(x_1+1)e^{x_1}x-ax_1^2e^{x_1}$ ------5

$g(x)$在点$(x_2，y_2)$处的切线方程为

$y=-2x_2(x-x_2)-x_2^2$，即 $y=-2x_2x+x_2^2$ ------6

$\therefore$ 由题意得$\begin{cases}a(x_1+1)e^{x_1}=-2x_2\\-ax_1{}^2e^{x_1}=x_2^2\end{cases}$ ------7

整理可得$a=\dfrac{-4x_1^2}{(x_1+1)^2e^{x_1}}<0$ ------8

设$h(x)=\dfrac{-4x^2}{(x+1)^2e^x}$ 则$h'(x)=\dfrac{4x(x+2)(x-1)}{(x+1)^3e^x}$ ------9

$\therefore$当$x\in(0,1)$，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减; 当$x\in(1,+\infty)$，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增. ------10

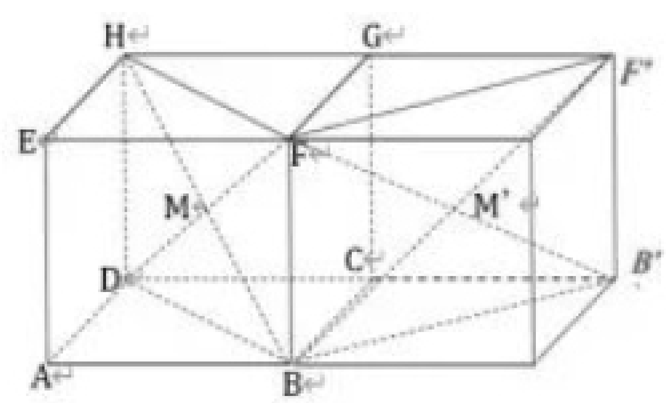
$h(1)=-\frac{1}{e}$，$h(0)=0$且$h(x)<0$ $\therefore a\in[-\frac{1}{e},0)$ ------12

20. 解:

（1） 证明：若 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，则平面 $DCGH$、平面 $CB'F'G$ 为同一个平面. ------1

连接 BH，BF'，则 M是 BH中点，M' 是 BF' 中点，所以平面 MBF 与平面 $BFHD$ 重合，

平面 $M'B'F'$ 与平面 $BFF'B'$ 重合 ------2



由正方体性质可知 $BF\perp$ 平面 $EFF'H$ ------3

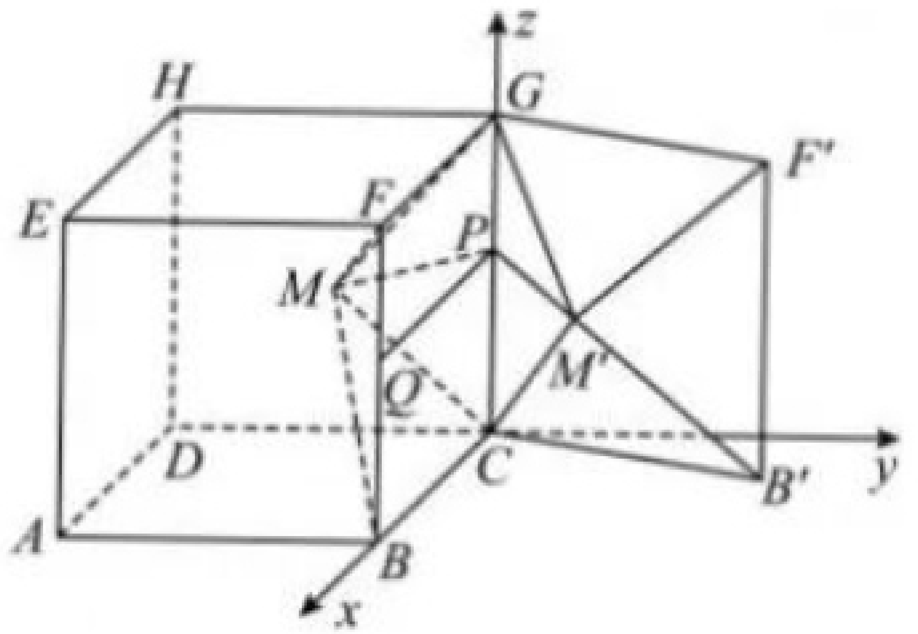
$\angle HFF'$ 为二面角 $H-BF-F'$ 的平面角， ------4

而 $\angle HFG=\angle F'FG=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $\angle HFF'=\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore$平面 $MBF\perp$平面 $M'B'F'$ ------5

（2）解：假设存在 α，使得直线 $M'F'\perp$平面 MBC，

以 C 为原点，分别以 $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CG}$ 为 x，y，z 轴正方向建立空间直角坐标系， ------6



则 C（0，0，0），B（2，0，0），M（1，－1，1），故 $\overrightarrow{CB}=(2,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{CM}=(1,\ -1,\ 1)$，

设 $\vec{m}=(x,\ y,\ z)$ 是平面 MBC 的法向量，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CM}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CM}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}2x=0\\ -y+z=0\end{cases}$，

取 $y=1$，得 $\vec{m}=(0,\ 1,\ 1)$ 是平面 MBC 的一个法向量，------7

取 CG 中点 P，BF 中点 Q，连接 PQ，PM，则 $PM\perp CG$，$PQ\perp CG$，$PM'\perp CG$，

于是 $\angle MPM'$ 是二面角 $M-CG-M'$ 的平面角，$\angle MPQ$ 是二面角 $M-CG-Q$ 的平面角，

$\angle QPM'$ 是二面角 $Q-CG-M'$ 的平面角．于是 $\angle MPM'=\alpha$，$\angle MPQ=\dfrac{\pi}{4}$，

所以 $\angle QPM'=\alpha-\dfrac{\pi}{4}$，且 $CG\perp$ 平面 MPM'，$M'P=\sqrt{2}$，

故 $M'\left(\sqrt{2}\cos(\alpha-\dfrac{\pi}{4}),\sqrt{2}\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4}),1\right)$，

同理 $F'(2\cos\alpha,2\sin\alpha,2)$，------9

所以 $\overrightarrow{M'F'}=\left(2\cos\alpha-\sqrt{2}\cos(\alpha-\dfrac{\pi}{4}),2\sin\alpha-\sqrt{2}\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4}),1\right)$，

因为 $2\cos\alpha-\sqrt{2}\cos(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=2\cos\alpha-\sqrt{2}\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}-\sqrt{2}\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}=\cos\alpha-\sin\alpha$，

$2\sin\alpha-\sqrt{2}\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=2\sin\alpha-\sqrt{2}\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}+\sqrt{2}\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}=\cos\alpha+\sin\alpha$，

所以 $\overrightarrow{M'F'}=(\cos\alpha-\sin\alpha,\cos\alpha+\sin\alpha,1)$，------10

若直线 $M'F'\perp$ 平面 MBC，$\vec{n}$ 是平面 MBC 的一个法向量，则 $\overrightarrow{M'F'}\ /\!/\ \vec{m}$，

即存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使得 $\overrightarrow{M'F'}=\lambda\vec{m}$，则 $\begin{cases}\cos\alpha-\sin\alpha=0\\ \cos\alpha+\sin\alpha=\lambda\\ 1=\lambda\end{cases}$，此方程组无解，------11

所以不存在 $\alpha\in(0,\ \pi)$，使得直线 $M'F'\perp$ 平面 MBC．------12

21．解：（1）在△ABC 中，由余弦定理和 $a+b=c+h$ 可得，.

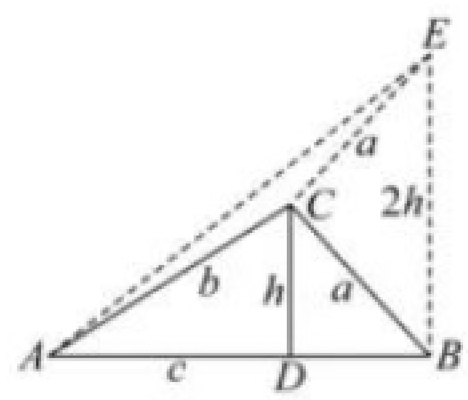
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(a+b)^2-c^2-2ab}{2ab}=\frac{(c+h)^2-c^2}{2ab}-1=\frac{h^2+2ch}{2ab}-1, \qquad ------1$$

又由面积公式可知 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ch$，$\therefore ab=\frac{ch}{\sin C}$， ------2

$\therefore \frac{1+\cos C}{\sin C}=\frac{h^2+2ch}{2ch}=1+\frac{h}{2c}$，由 $c=3h$ $\quad \frac{1+\cos C}{\sin C}=\frac{7}{6}$ ------3

又 $\frac{\sin C}{1+\cos C}=\frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{1+2\cos^2\frac{C}{2}-1}=\tan\frac{C}{2}$，$\therefore \tan\frac{C}{2}=\frac{6}{7}$ ------4

$\therefore \tan C=\frac{2\tan\frac{C}{2}}{1-\tan^2\frac{C}{2}}=\frac{2\times\frac{6}{7}}{1-\frac{36}{49}}=\frac{84}{13}$； ------5



（2）由（1）知 $1+\frac{h}{2c}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$.

如图，在△ABC 中，过 B 作 AB 的垂线 EB，且使 $EB=2h$，则 $CE=CB=a$， ------6

$\because a+b=c+h\geq|AE|$，即 $(c+h)^2\geq c^2+4h^2$，得 $\frac{h}{2c}\leqslant\frac{1}{3}$，

$\therefore 1<1+\frac{h}{2c}\leqslant\frac{4}{3}$， ------7

$\therefore 1<\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}\leqslant\frac{4}{3}$，$\therefore \frac{3}{4}\leqslant\tan\frac{C}{2}<1$， ------8

$$\cos C=\frac{\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}}==\frac{1-\tan^2\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}=\frac{2}{1+\tan^2\frac{C}{2}}-1 \qquad ----10$$

由 $\frac{3}{4}\leq\tan\frac{C}{2}<1$，得 $\frac{25}{16}\leq 1+\tan^2\frac{C}{2}<2$ $\quad \therefore 0<\cos C\leq\frac{7}{25}$ ----11

$\therefore \cos C$ 的取值范围为 $\left(0,\frac{7}{25}\right]$. ------12

22 解：（1）△QRF_2 的周长 $C_{\triangle QRF_2}=|QF_1|+|QF_2|+|RF_1|+|RF_2|=4a=8$，解得 $a=2$， ------1

因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $c=\sqrt{3}$， ------2

则 $b^2=a^2-c^2=1$，

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$； ------4

（2） 证明：由题意可知直线 QR 和直线 QS 的斜率不为零，设直线 QR 和直线 QS 的方程为

$x=my-\sqrt{3},x=ny+\sqrt{3}$，$Q$（$x_0$，$y_0$），$R$（$x_1$，$y_1$），$S$（$x_2$，$y_2$）， ------5

联立 $\begin{cases}x=my-\sqrt{3}\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，消去 x 并整理得 $(m^2+4)y^2-2\sqrt{3}my-1=0$，

由韦达定理得 $\begin{cases}y_0+y_1=\frac{2\sqrt{3}m}{m^2+4}\\ y_0\cdot y_1=-\frac{1}{m^2+4}\end{cases}$， ------6

同理得 $\begin{cases}y_0+y_2=-\frac{2\sqrt{3}n}{n^2+4}\\ y_0\cdot y_2=-\frac{1}{n^2+4}\end{cases}$， ------7

因为 $x_0=my_0-\sqrt{3},x_0=ny_0+\sqrt{3}$，所以 $\frac{y_0+y_1}{y_0\cdot y_1}=-2\sqrt{3}m=-2\sqrt{3}\frac{x_0+\sqrt{3}}{y_0}$，

可得 $\frac{y_0+y_1}{y_1}=-2\sqrt{3}x_0-6$，　　即 $\frac{y_0}{y_1}=-2\sqrt{3}x_0-7$； ------8

同理可得 $\frac{y_0+y_2}{y_0\cdot y_2}=2\sqrt{3}n=2\sqrt{3}\frac{x_0-\sqrt{3}}{y_0}$，

可得 $\frac{y_0+y_2}{y_2}=2\sqrt{3}x_0-6$ 即 $\frac{y_0}{y_2}=2\sqrt{3}x_0-7$， ------9

不妨设 $y_0>0$，

由 $\frac{S_{\Delta QRS}}{S_{\Delta QF_1F_2}}=\frac{\frac{1}{2}|QR|\cdot|QS|\sin\angle RQS}{\frac{1}{2}|QF_1|\cdot|QF_2|\sin\angle RQS}=\frac{|QR|}{|QF_1|}\cdot\frac{|QS|}{|QF_2|}=\frac{y_0-y_1}{y_0}\cdot\frac{y_0-y_2}{y_0}$， ------10

又 $S_{\Delta QF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot y_0$

则

$$S_{\Delta QRS}=\frac{y_0-y_1}{y_0}\cdot\frac{y_0-y_2}{y_0}\cdot\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot y_0=\sqrt{3}y_0\left(1-\frac{y_1}{y_0}\right)\cdot\left(1-\frac{y_2}{y_0}\right)=\sqrt{3}y_0\left(1+\frac{1}{2\sqrt{3}x_0+7}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2\sqrt{3}x_0-7}\right)$$

$$=\sqrt{3}y_0\left(\frac{2\sqrt{3}x_0+8}{2\sqrt{3}x_0+7}\right)\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}x_0-8}{2\sqrt{3}x_0-7}\right)=\sqrt{3}y_0\frac{12x_0^{\ 2}-64}{12x_0^{\ 2}-49}$$ ------11

把 $x_0^2=4(1-y_0^2)$ 代入上式得，

$$S_{\Delta QRS}=\sqrt{3}y_0\frac{12\left[4\left(1-y_0^{\ 2}\right)\right]-64}{12\left[4\left(1-y_0^{\ 2}\right)\right]-49}=\frac{48\sqrt{3}y_0^{\ 3}+16\sqrt{3}y_0}{48y_0^{\ 2}+1}$$ -------12