

郑州市 2023—2024 学年上期期末考试

高一数学试题卷

注意事项:

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 考试时间 120 分钟, 满分 150 分. 考生应首先阅读答题卡上的文字信息, 然后在答题卡上作答, 在试题卷上作答无效. 交卷时只交答题卡.

第 I 卷(选择题, 共 60 分)

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x < 4\}$, $B = \{x | 1 < x < 5\}$, 则 $A \cap B =$

A. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

B. $\{2, 3\}$

C. $\{x | 0 \leq x < 5\}$

D. $\{x | 1 < x < 4\}$

2. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbb{R}, \tan x \leq 1$, 则命题 p 的否定是

A. $\neg p: \exists x \in \mathbb{R}, \tan x > 1$

B. $\neg p: \forall x \in \mathbb{R}, \tan x \leq 1$

C. $\neg p: \exists x \in \mathbb{R}, \tan x \geq 1$

D. $\neg p: \forall x \in \mathbb{R}, \tan x > 1$

3. 若 $a = \log_x 0.3$, $b = 3^x$, $c = \sin \frac{\pi}{10}$, 则 a, b, c 的大小关系为

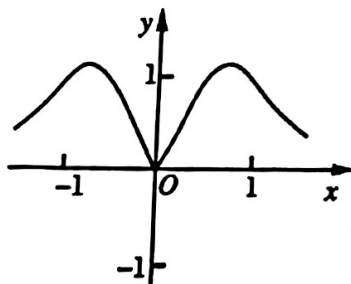
A. $a < c < b$

B. $a < b < c$

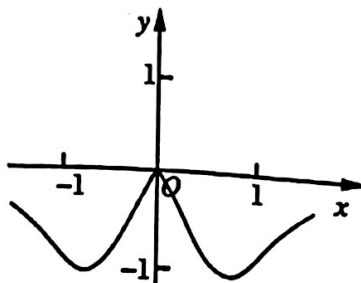
C. $c < a < b$

D. $b < a < c$

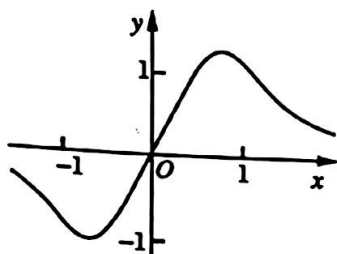
4. 函数 $y = \frac{2x}{x^4 + 1}$ 的图象大致为



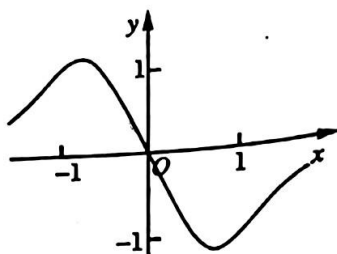
A.



B.



C.



D.

5. 已知 x, y 都是正实数, 且满足 $x+y=xy$, 则 $x+4y$ 的最小值为

A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

6. 已知 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 若 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$, 则 $\cos(\alpha + \beta) =$

A. $-\frac{16}{65}$

B. $\frac{63}{65}$

C. $\frac{56}{65}$

D. $-\frac{33}{65}$

7. 用 $\max\{a, b\}$ 表示 a, b 两个数中的最大值, 设函数 $f(x) = \max\{|x|, \frac{1}{x}\}$,

若 $x > 0$ 时, 不等式 $f(x) \geq m-1$ 恒成立, 则实数 m 的最大值是

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

8. 已知函数 $f(x) = 2^x + x - 2$, $g(x) = \log_2 x + x - 2$, $h(x) = x^3 + x - 2$ 的零点分别为 a, b, c , 则有

A. $a > b > c$

B. $a > c > b$

C. $c > a > b$

D. $b > c > a$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$, 则

A. $f(x)$ 的最大值为 2

B. 函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称

C. 直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴

D. 函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 上单调递增

10. 已知函数 $f(x) = \ln|x|$, 则

A. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$

B. 函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbb{R}$

C. 函数 $f(x)$ 是偶函数

D. 函数 $f(x)$ 是增函数

11. 下列结论中不正确的是

A. 当 $0 < x \leq 2$ 时, $x - \frac{1}{x}$ 无最大值

B. 当 $x \geq 3$ 时, $x + \frac{1}{x-1}$ 的最小值为 3

C. 当 $x > 0$ 且 $x \neq 1$ 时, $\lg x + \frac{1}{\lg x} \geq 2$

D. 当 $x < 0$ 时, $x + \frac{1}{x} \leq -2$

12. 下面命题正确的是

A. 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则“ $2^a > 2^b$ ”是“ $\ln a > \ln b$ ”的必要不充分条件

B. 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 则“ $x + y > 4$ ”是“ $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ”的充分不必要条件

C. “ $ac < 0$ ”是“一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一正一负两个实数根”的充要条件

D. “ $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ ”是“ $0 < \sin \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ”的充分不必要条件

第 II 卷(非选择题, 共 90 分)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知幂函数 $y = f(x)$ 过点 $(\frac{1}{8}, \frac{1}{2})$, 则该幂函数解析式为_____.

14. 已知一个手表慢了 10 分钟, 如果转动分针将其校准, 则分针应转动_____ rad.

15. 已知函数 $y = f(x)$ 为奇函数, $g(x) = \frac{1}{2x}$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象仅有四个交点, 分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$, 则 $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 =$ _____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \leq 0, \\ -2 + \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 若方程 $f(x) = k$ 有 3 个实数解时,

k 的取值范围是_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知 $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, 求 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ 的值.

18. (12 分)

(I) 计算: $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \log_2 3 \cdot \log_2 4 - \lg 100$;

(II) 已知 $a \in \mathbb{R}, a + a^{-1} = 3$, 求 $a^2 + a^{-2}$ 的值.

19. (12 分) 对于函数 $f(x) = a - \frac{2}{e^x + 1}, (a \in \mathbb{R})$.

(I) 判断函数 $f(x)$ 的单调性, 并给出证明;

(II) 是否存在实数 a 使函数 $f(x)$ 为奇函数?

20. (12 分)

设函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \sin^2 x - \sqrt{3} \cos^2 x - \frac{1}{2}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及其图象的对称轴;

(II) 将函数 $f(x)$ 的图象先向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位, 再向上平移 1 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象, 求函数 $g(x)$ 在 $\left(-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{8}\right)$ 上的值域.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = -x^2 + (a-1)x - a + 2$.

(I) 若不等式 $f(x) \leq 2$ 对一切实数 x 恒成立, 求 a 的取值范围;

(II) 解关于 x 的不等式 $f(x) > 0$.

22. (12 分)

后疫情时代,全民健康观念发生很大改变. 越来越多人注重通过摄入充足的水果,补充维生素 C,提高自身免疫力. 郑州某地区适应社会需求,利用当地的地理优势,发展种植某种富含维生素 C 的珍稀果树. 经调研发现:该珍稀果树的单株产量 W (单位: 千克) 与单株用肥量 x (单位: 千克) 满足如下关系:

$$W(x) = \begin{cases} 5(x^2 + 3), & 0 \leq x \leq 2, \\ 50 - \frac{50}{x+1}, & 2 < x \leq 5. \end{cases}$$

已知肥料的成本为 10 元/千克,其他人工投入成本合计 $20x$ 元. 若这种水果的市场售价大约为 15 元/千克,且销路畅通供不应求. 记该果树的单株利润为 $f(x)$ (单位: 元).

(I) 求 $f(x)$ 的函数关系式;

(II) 当单株施用肥料为多少千克时,该果树的单株利润最大,并求出最大利润.