漳州市2024届高三毕业班第二次质量检测

数学　答案详解

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	D	C	D	B	A	B	B	AC	ABC	BD	AD

1. B　**【命题意图】**本题考查指数不等式、对数不等式、分式不等式及函数的定义域与值域、集合的交集运算，考查运算求解能力，考查数学运算核心素养.

【解题思路】因为 $\log_4 x\leqslant 1$，所以 $0<x\leqslant 4$，所以集合 $A=(0,4]$. 对于A选项，$B=\{y\mid y=\sqrt{3-x}\}=[0,+\infty)$，则 $A\cap B\neq(0,3]$，所以A选项不合题意；对于B选项，$B=\{x\mid y=\sqrt{3-x}\}=(-\infty,3]$，则 $A\cap B=(0,3]$，所以B选项符合题意；对于C选项，$B=\{x\mid 2^x<8\}=(-\infty,3)$，则 $A\cap B\neq(0,3]$，所以C选项不合题意；对于D选项，不等式 $\frac{x}{x-3}\leqslant 0$ 等价于 $\begin{cases}x-3\neq 0,\\ x(x-3)\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $B=[0,3)$，则 $A\cap B\neq(0,3]$，所以D选项不合题意，故选B.

2. D　**【命题意图】**本题考查存在量词命题、命题的真假、三角函数的值域，考查运算求解能力，考查逻辑推理、数学运算核心素养.

【解题思路】若 $\exists\alpha\in[0,+\infty)$，$\cos\alpha<m$ 为真命题，则 $m>(\cos\alpha)_{\min}$. 因为 $\cos\alpha$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值为 -1，所以 $m>-1$，故选D.

3. C　**【命题意图】**本题考查向量的坐标运算、共线向量、垂直向量，考查运算求解能力，考查数学运算核心素养.

【解题思路】因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，所以 $(-1)\times(-2)-mn=0$，解得 $mn=2$. 又 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$，所以 $n\times 1+(-2)\times 1=0$，解得 $n=2$，所以 $m=1$，所以 $m+n=3$，故选C.

4. D　**【命题意图】**本题考查数学文化、空间几何体的体积，考查空间想象能力、运算求解能力，考查直观想象、数学运算核心素养.

【解题思路】根据祖暅原理，知该"睡美人城堡"的体积与一个底面圆半径为9，高为9的圆锥的体积近似相等，所以该"睡美人城堡"的体积约为 $\frac{1}{3}\pi\times 9^2\times 9=243\pi$，故选D.

5. B　**【命题意图】**本题考查古典概型、条件概率，考查运算求解能力、数据处理能力，考查数学运算核心素养.

【解题思路】甲、乙两名大学生从四个社区中随机选择一个社区的情况共有 $4^2=16$（种），事件 M 发生的情况共有 $16-3^2=7$（种），事件 M 和事件 N 同时发生的情况共有6种，所以 $P(N\mid M)=\frac{P(MN)}{P(M)}=\frac{\frac{6}{16}}{\frac{7}{16}}=\frac{6}{7}$，故选B.

6. A　**【命题意图】**本题考查三角恒等变换，考查推理论证能力、运算求解能力，考查逻辑推理、数学运算核心素养.

【解题思路】因为 $\sqrt{3}\cos 2\theta-\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)=0$，所以 $\sqrt{3}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-(\cos\theta+\sin\theta)=0$，即 $[\sqrt{3}(\cos\theta-\sin\theta)-1](\cos\theta+\sin\theta)=0$，解得 $\cos\theta-\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\cos\theta+\sin\theta=0$. 又 θ 为锐角，所以 $\cos\theta-\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $(\cos\theta-\sin\theta)^2=\frac{1}{3}$，即 $1-\sin 2\theta=\frac{1}{3}$，解得 $\sin 2\theta=\frac{2}{3}$，所以 $\cos\left(\frac{13\pi}{2}+2\theta\right)=-\sin 2\theta=-\frac{2}{3}$，故选A.

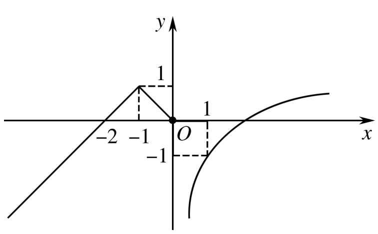
7. B 【命题意图】本题考查等差、等比数列的性质、通项公式与等差数列的求和公式，考查运算求解能力，考查数学运算核心素养.

【解题思路】由题意得 $a_4=a_1+6$，$b_3=4b_1$. 又 $b_1=a_1+1$，$b_3=a_4+1$，所以 $a_1+7=4(a_1+1)$，解得 $a_1=1$，所以 $b_1=2$，所以 $b_n=2^n$，$a_n=2n-1$，所以 $S_n=n^2$. 若 $b_6>S_n$，则 $64>n^2$. 又 $n\in\mathbf{N}^*$，则 n 的最大值为 7，故选 B.

8. B 【命题意图】本题考查分段函数、函数的零点，考查运算求解能力、推理论证能力，考查逻辑推理、数学运算核心素养.

【解题思路】依题意，函数 $g(x)=f(f(x)-1)$ 零点的个数，即为方程 $f(f(x)-1)=0$ 解的个数，作函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x-\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ -|x+1|+1, & x\leqslant 0\end{cases}$ 的大致图象如图所示.

令 $f(x)-1=t$，则 $f(t)=0$，当 $t>0$ 时，$\ln t-\dfrac{1}{t}=0$. 令 $h(t)=\ln t-\dfrac{1}{t}$，$t>0$，易知 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 又 $h(1)=-1<0$，$h(\mathrm{e})=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}>0$，所以存在 $t_1\in(1,\mathrm{e})$，使得 $h(t_1)=0$；当 $t\leqslant 0$ 时，$-|t+1|+1=0$，解得 $t=0$ 或 -2，又 $f(x)-1=t$，则 $f(x)=t+1$，当 $t=0$ 时，$f(x)=1$，根据 $f(x)$ 的图象可知，方程 $f(x)=1$ 有两个解；当 $t=-2$ 时，$f(x)=-1$，根据 $f(x)$ 的图象可知，方程 $f(x)=-1$ 有两个解；当 $t=t_1$，$t_1\in(1,\mathrm{e})$ 时，$f(x)=t_1+1$，根据 $f(x)$ 的图象可知，方程 $f(x)=t_1+1$ 有一个解. 综上所述，函数 $g(x)=f(f(x)-1)$ 的零点个数为 5，故选 B.



9. AC 【命题意图】本题考查抛物线的几何性质及标准方程、圆的性质、直线与圆的位置关系，考查运算求解能力，考查数学运算核心素养.

【解题思路】依题意，抛物线 C 的准线方程为 $x=-2$，即 $x=-\dfrac{p}{2}=-2$，所以 $p=4$，即抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$，则抛物线 C 的焦点为 $(2,0)$. 设直线 l 的方程为 $x=ty+2$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}x=ty+2,\\ y^2=8x,\end{cases}$ 消去 x 整理得 $y^2-8ty-16=0$，$\Delta>0$ 恒成立，则 $\begin{cases}y_1+y_2=8t,\\ y_1y_2=-16,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x_1+x_2=t(y_1+y_2)+4=8t^2+4,\\ x_1x_2=\dfrac{(y_1y_2)^2}{64}=4.\end{cases}$

又因为线段 AB 为⊙D 的直径，⊙D 与 C 的准线相切于点 $P(-2,-1)$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(-2-x_1,-1-y_1)\cdot(-2-x_2,-1-y_2)=(2+x_1)(2+x_2)+(1+y_1)(1+y_2)=0$，整理得 $4+2(x_1+x_2)+x_1x_2+1+y_1+y_2+y_1y_2=0$，即 $4+2(8t^2+4)+4+1+8t-16=0$，即 $(4t+1)^2=0$，解得 $t=-\dfrac{1}{4}$，所以直线 l 的方程为 $4x+y-8=0$，所以A选项正确；因为 DP 垂直于准线，所以点 D 的纵坐标为 -1，代入直线 l 的方程，可得点 $D\left(\dfrac{9}{4},-1\right)$，所以B选项错误；根据抛物线的定义可得 $|AB|=x_1+x_2+4=\dfrac{17}{2}$，所以⊙$D$ 的半径为 $\dfrac{17}{4}$，所以⊙D 的周长为 $\dfrac{17}{2}\pi$，所以 C 选项正确；圆心 $D\left(\dfrac{9}{4},-1\right)$ 到直线 $4x+2y+9=0$ 的距离为 $\dfrac{\left|4\times\dfrac{9}{4}-2+9\right|}{2\sqrt{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}<\dfrac{17}{4}$，所以直线 $4x+2y+9=0$ 与⊙D 相交，不相切，所以 D 选项错误，故选 AC.

10. ABC 【命题意图】本题考查三角函数的图象与性质，考查运算求解能力，考查数学运算核心素养.

【解题思路】$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=-\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)$，令$\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，则$x=2k\pi+\frac{5\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，当$k=0$时，$x=\frac{5\pi}{2}$，所以$x=\frac{5\pi}{2}$是函数$f(x)$图象的一条对称轴$\left(另解：因为f\left(\frac{5\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}，即当x=\frac{5\pi}{2}时，函数f(x)取得最小值，所以x=\frac{5\pi}{2}是函数f(x)图象的一条对称轴\right)$，所以A选项正确；令$\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则$x=2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，当$k=-1$时，$x=-\frac{\pi}{2}$，所以$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$是函数$f(x)$图象的一个对称中心$\left(另解：因为f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=0，所以\left(-\frac{\pi}{2},0\right)是函数f(x)图象的一个对称中心\right)$，所以B选项正确；因为$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]=\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$，所以将函数$y=\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$的图象向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度可得到函数$y=\sqrt{2}\cos\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$的图象，即为函数$f(x)$的图象，所以C选项正确；$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$，当$x\in(0,2\pi)$时，$\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，所以函数$f(x)$的值域为$(-1,\sqrt{2}]$，所以D选项错误，故选ABC.

11. BD 【命题意图】本题考查等比数列的定义、通项公式，考查运算求解能力、推理论证能力，考查数学运算、逻辑推理核心素养.

【解题思路】因为$S_2-2S_1=(a_1+a_2)-2a_1=(4+4)-2\times4=0$，所以$\{S_n-2S_{n-1}\}$不是等比数列（提示：等比数列的每一项均不为0），所以A选项错误；由$4(S_n-S_{n-1})=S_{n+1}$，得$S_{n+1}-2S_n=2S_n-4S_{n-1}=2(S_n-2S_{n-1}),n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*$，以及$S_2-2S_1=0$，易得$S_n=2S_{n-1},n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*$. 又$S_1=a_1=4$，所以数列$\{S_n\}$是以4为首项，2为公比的等比数列，所以$S_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$，所以$S_6=2^{6+1}=2^7=128$，所以B选项正确；$S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-2^n=2^n(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，当$n=1$时，$a_1=S_1=4$，则$a_n=\begin{cases}4, & n=1,\\2^n, & n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$所以C选项错误，D选项正确，故选BD.

12. AD 【命题意图】本题考查正四棱柱的结构特征及截面、异面直线所成角，考查空间想象能力、运算求解能力，考查直观想象、数学运算核心素养.

【解题思路】不妨设$AB=2$，则$AA_1=4$，对于A选项，如图1，异面直线EF与直线BB_1所成的角，即为直线EF与直线CC_1所成的角，连接EC，则$\angle EFC$即为直线EF与直线CC_1所成的角或其补角. 易得$EC\perp CC_1$，在Rt$\triangle EFC$中，$FC=\frac{1}{2}CC_1=2$，$EC=\sqrt{EB^2+BC^2}=\sqrt{5}$，所以$\tan\angle EFC=\frac{EC}{FC}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以A选项正确；对于B选项，如图2，延长$DC$交$D_1F$于点$H$，连接$EH$交$BC$于点$I$，延长$HE$交$DA$于点$K$，连接$D_1K$交$AA_1$于点$J$，连接$FI,EJ$，则五边形$D_1FIEJ$即为平面$D_1EF$截该四棱柱得到的截面，即截面$\alpha$为五边形，所以B选项错误；对于C选项，易知$\frac{HC}{HD}=\frac{FC}{DD_1}=\frac{1}{2}$，$D_1F=2\sqrt{2}$，所以$HC=CD=2$，即$DH=4$. 又$\frac{AE}{HD}=\frac{KA}{KD}=\frac{1}{4}$，所以$KA=\frac{2}{3}$，所以$KD=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$. 又$\frac{CI}{KD}=\frac{CH}{HD}$，所以$CI=\frac{1}{2}KD=$

$\frac{4}{3}$，所以 $BI=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$，$FI=\sqrt{FC^2+CI^2}=\frac{2\sqrt{13}}{3}$，所以 $EI=\sqrt{EB^2+BI^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}$. 在 Rt$\triangle KD_1D$ 中，$KD_1=\sqrt{KD^2+DD_1^2}=\frac{4\sqrt{13}}{3}$. 又 $\frac{KJ}{KD_1}=\frac{AJ}{DD_1}=\frac{KA}{KD}=\frac{1}{4}$，所以 $D_1J=\frac{3}{4}KD_1=\sqrt{13}$，$AJ=1$，所以 $JE=\sqrt{AJ^2+AE^2}=\sqrt{2}$，所以截面 α 的周长为 $D_1F+FI+EI+JE+D_1J=2\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{13}}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3}+\sqrt{2}+\sqrt{13}=3\sqrt{2}+2\sqrt{13}$，所以 C 选项错误；因为 $KH=\sqrt{4^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{13}}{3}$，所以 $KD_1=KH$，所以 $\triangle KD_1H$ 为等腰三角形. 又 $D_1H=4\sqrt{2}$，所以 $FH=\frac{1}{2}D_1H=2\sqrt{2}$，连接 KF，如图 2 所示，则 $KF=\sqrt{KH^2-FH^2}=\frac{2\sqrt{34}}{3}$，所以 $S_{\triangle KD_1H}=\frac{1}{2}D_1H\times KF=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{34}}{3}=\frac{8\sqrt{17}}{3}$. 易知 $\triangle KD_1H\backsim\triangle IFH$，所以 $\frac{S_{\triangle IFH}}{S_{\triangle KD_1H}}=\frac{1}{4}$，则 $S_{\triangle IFH}=\frac{2\sqrt{17}}{3}$，同理可得 $S_{\triangle KJE}=\frac{\sqrt{17}}{6}$，所以截面 α 的面积为 $S_{\triangle KD_1H}-S_{\triangle IFH}-S_{\triangle KJE}=\frac{11\sqrt{17}}{6}$，所以 D 选项正确，故选 AD.

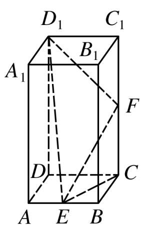


图 1

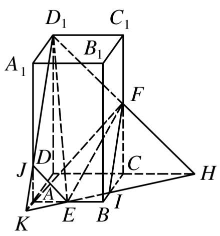


图 2

13. 填 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\sqrt{15}}{5}$，$\frac{\sqrt{42}}{7}$ 三者中任何一个即可 **【命题意图】**本题考查椭圆的标准方程、离心率，考查运算求解能力，考查数学运算核心素养.

【解题思路】当椭圆 C 的焦点在 x 轴上时，可得 $6-m>2m-3>0$，解得 $\frac{3}{2}<m<3$. 又 $m\in\mathbf{Z}$，所以 $m=2$，此时椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，则椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$；当椭圆 C 的焦点在 y 轴上时，可得 $2m-3>6-m>0$，解得 $3<m<6$. 又 $m\in\mathbf{Z}$，所以 $m=4$ 或 $m=5$，此时椭圆 C 的方程为 $\frac{y^2}{5}+\frac{x^2}{2}=1$ 或 $\frac{y^2}{7}+x^2=1$，则椭圆 C 的离心率分别为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 和 $\frac{\sqrt{42}}{7}$，故可以填 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\sqrt{15}}{5}$，$\frac{\sqrt{42}}{7}$ 三者中任意一个即可.

14. 63 **【命题意图】**本题考查二项式定理，考查运算求解能力，考查数学运算核心素养.

【解题思路】二项式 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^n$ 的展开式通项 $T_{r+1}=\mathrm{C}_n^r(\sqrt{x})^{n-r}(-2)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r=(-2)^r\mathrm{C}_n^r x^{\frac{n-3r}{2}}$，令 $r=2$，则可得 $n-3\times 2=0$，所以 $n=6$，所以二项式 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中二项式系数和 $a=2^6=64$，令 $x=1$，可得所有项的系数和 $b=(-1)^6=1$，则 $a-b=64-1=63$.

15. $\sqrt{10}+1$ **【命题意图】**本题考查复数的运算、复数的几何意义，考查运算求解能力、应用意识，考查数学运算、逻辑推理核心素养.

【解题思路】令复数 $z_1=x+y\mathrm{i}$，$x,y\in\mathbf{R}$，则 $\overline{z}=x-y\mathrm{i}$，所以 $z_1+2\overline{z}_1=3x-y\mathrm{i}=-3-\mathrm{i}$，所以 $x=-1$，$y=1$，即 $z_1=-1+\mathrm{i}$. 又因为 $|z_2-z_1|=1$，即在复平面内，复数 z_2 所对应的点的轨迹是以 $(-1,1)$ 为圆心，1 为半径的圆. 又点 $(-1,1)$ 到点 $(0,-2)$ 的距离为 $\sqrt{(-1-0)^2+(1+2)^2}=\sqrt{10}$，所以 $|z_2+2\mathrm{i}|$ 的最大值为 $\sqrt{10}+1$.

16. $-2\ 025$　$-\dfrac{1}{2}$　**【命题意图】**本题考查抽象函数的奇偶性、周期性、导数的应用,考查推理论证能力、运算求解能力,考查逻辑推理、数学运算核心素养.

【解题思路】因为曲线 $f(x-1)$ 关于 $(1,0)$ 对称,所以曲线 $f(x)$ 关于坐标原点 O 对称,即函数 $f(x)$ 为奇函数.又因为 $x\in\mathbf{R}$,所以 $f(0)=0$,$f(0)-f(6)=3$,所以 $f(6)=-3$.因为 $f(x)-f(6-x)=3-x$,整理得 $f(x)+\dfrac{x}{2}=f(6-x)+\dfrac{6-x}{2}$,令 $g(x)=f(x)+\dfrac{x}{2}$,则函数 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的可导奇函数,$g(0)=0$,且 $g(x)=g(6-x)$.又 $g(6-x)=-g(x-6)$,所以 $g(x)=-g(x-6)=g(x-12)$,所以函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称,且 12 为函数 $g(x)$ 的一个周期,所以 $g(2\ 022)+g(2\ 028)=g(168\times12+6)+g(169\times12+0)=g(6)+g(0)=f(6)+\dfrac{6}{2}=0$,则 $f(2\ 022)+f(2\ 028)=g(2\ 022)-\dfrac{2\ 022}{2}+g(2\ 028)-\dfrac{2\ 028}{2}=-2\ 025$.因为 $g(x)=g(6-x)=-g(x-6)$,所以 $g'(x)=-g'(6-x)=-g'(x-6)$,所以 $g'(3)=-g'(3)=-g'(-3)$,所以 $g'(3)=-g'(3)=-g'(-3)=0$.又 $g(x)=g(x-12)$,所以 $g'(x)=g'(x-12)$,所以函数 $g'(x)$ 也是以 12 为周期的周期函数.因为 $f(x)=g(x)-\dfrac{x}{2}$,所以 $f'(x)=g'(x)-\dfrac{1}{2}$,所以 $f'(2\ 025)=g'(2\ 025)-\dfrac{1}{2}=g'(169\times12-3)-\dfrac{1}{2}=g'(-3)-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$.因为 $f(x)+f(-x)=0$,所以 $f'(x)-f'(-x)=0$,即 $f'(-x)=f'(x)$,所以 $f'(-2\ 025)=f'(2\ 025)=-\dfrac{1}{2}$.

17. **【命题意图】**本题考查等差数列的通项公式、等比数列的性质、裂项相消法求和,考查推理论证能力、运算求解能力,考查逻辑推理、数学运算核心素养.

解:(Ⅰ)因为 $a_{n+1}-\dfrac{S_n}{n}=n+1$,

所以 $na_{n+1}=S_n+n(n+1)$,　①

当 $n\geqslant2$ 时,$(n-1)a_n=S_{n-1}+n(n-1)$,　②　(1 分)

①−②得 $na_{n+1}-(n-1)a_n=a_n+2n$,

化简可得 $a_{n+1}-a_n=2$,$n\geqslant2$,　(2 分)

且当 $n=1$ 时,$a_2-a_1=2$ 满足上式,　(3 分)

由题可得 $a_2a_8=a_4^2$,

故 $(a_1+2)(a_1+14)=(a_1+6)^2$,解得 $a_1=2$,

即数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项,2 为公差的等差数列,　(4 分)

所以 $a_n=a_1+(n-1)\times2=2n$,$n\in\mathbf{N}^*$.　(5 分)

(Ⅱ)证明:令 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{2n\cdot2(n+1)}$

$=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$,　(7 分)

所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

$=\dfrac{1}{4}\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$.　(8 分)

又函数 $y=1-\dfrac{1}{x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,　(9 分)

所以 $T_n\geqslant\dfrac{1}{4}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}$.　(10 分)

18. **【命题意图】**本题考查正弦定理及其推广、三角形面积公式、三角恒等变换,考查推理论证能力、运算求解能力,考查逻辑推理、数学运算核心素养.

解:(Ⅰ)因为 $B=\dfrac{\pi}{6}$,$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 4,

所以 $\dfrac{AC}{\sin B}=8$,解得 $AC=4$.　(1 分)

在 $\triangle ABC$ 中,$BC=4\sqrt{2}$,

则 $\dfrac{BC}{\sin\angle CAB}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sin\angle CAB}=8$,

解得 $\sin\angle CAB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　(2 分)

又$\angle CAB\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以$\angle CAB=\frac{\pi}{4}$. (3 分)

在$\triangle ACD$中,$AC=4$,$\angle DAC=\frac{\pi}{2}-\angle CAB=\frac{\pi}{4}$,

$AD=2\sqrt{2}$,

所以$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4$. (5 分)

(Ⅱ)设$\angle DAC=\theta$,$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$.

又$D=\frac{2\pi}{3}$,所以$\angle ACD=\frac{\pi}{3}-\theta$.

因为$\angle DAB=\frac{\pi}{2}$,所以$\angle CAB=\frac{\pi}{2}-\theta$. (6 分)

在$\triangle DAC$中,$AC=4$,

由正弦定理得$\frac{AC}{\sin D}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$, (7 分)

解得$AD=\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\frac{8\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)=4\cos\theta-\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\theta$. (8 分)

在$\triangle ABC$中,$AC=4$,

由正弦定理得$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin\angle CAB}$,

解得$BC=8\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=8\cos\theta$, (9 分)

所以$BC-AD=4\left(\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)$

$=\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$. (10 分)

又$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,所以$\theta+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$,当且仅当$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,即$\theta=\frac{\pi}{6}$时,$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$取得最大值 1,

(11 分)

所以$BC-AD$的最大值为$\frac{8\sqrt{3}}{3}$. (12 分)

19.**【命题意图】**本题线面平行的判定定理、平面与平面所成夹角的余弦值,考查推理论证能力、空间想象能力、运算求解能力,考查逻辑推理、直观想象、数学运算核心素养.

解:(Ⅰ)取BC的中点F,连接OF,则$OF/\!/CD$,

过点F作$EF/\!/PC$,交PB于点E,

则E为PB的中点. (1 分)

因为$OF/\!/CD$,且$OF\not\subset$平面PCD,$CD\subset$平面PCD,

所以$OF/\!/$平面PCD. (2 分)

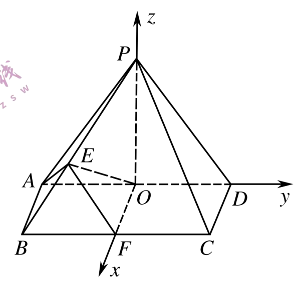
因为$EF/\!/PC$,$EF\not\subset$平面PCD,$PC\subset$平面PCD,

所以$EF/\!/$平面PCD. (3 分)

又$OF\cap EF=F$,所以平面$OEF/\!/$平面PCD.

又$OE\subset$平面OEF,所以$OE/\!/$平面PCD, (4 分)

所以点E的位置为PB的中点. (5 分)



(Ⅱ)因为侧面$PAD\perp$底面$ABCD$,所以侧棱PA和侧棱PD与底面$ABCD$所成的角分别为$\angle PAD$和$\angle PDA$,

则$\angle PAD=\angle PDA=60^\circ$,

所以$\triangle PDA$为等边三角形,

连接PO,则$PO\perp$底面$ABCD$. (6 分)

以O为坐标原点,分别以OF,OD,OP所在直线为x,y,z轴,建立空间直角坐标系.

因为$AD=2AB=2$,

所以$O(0,0,0)$,$A(0,-1,0)$,$B(1,-1,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,$E\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

则$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$,$\overrightarrow{PA}=(0,-1,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{OE}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{OA}=(0,-1,0)$. (8 分)

设平面AOE的法向量为$\boldsymbol{u}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{u}=0,\\\overrightarrow{OE}\cdot\boldsymbol{u}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-y=0,\\\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$

不妨令 $z=\sqrt{3}$，则 $x=-3$，

所以 $\boldsymbol{u}=(-3,0,\sqrt{3})$. (9 分)

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{v}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{v}=0,\\ \overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{v}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0-b-\sqrt{3}c=0,\\ a=0,\end{cases}$

不妨令 $c=\sqrt{3}$，则 $b=-3$，

所以 $\boldsymbol{v}=(0,-3,\sqrt{3})$. (10 分)

设平面 AOE 与平面 PAB 所成夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{4}$， (11 分)

所以平面 AOE 与平面 PAB 所成夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{4}$. (12 分)

20.【命题意图】本题考查互斥事件与相互独立事件的概率、离散型随机变量的分布列与期望，考查运算求解能力，考查数学运算、数据分析核心素养.

解：(Ⅰ)记事件 A_i 为“该型号新能源汽车参加碰撞测试的得分为 i 分$(i=1,3,5)$”，

则 $P(A_5)=\dfrac{1}{2}$，$P(A_3)=\dfrac{1}{3}$，$P(A_1)=1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$. (1 分)

记事件 B_i 为“该型号新能源汽车参加续航测试的得分为 i 分$(i=1,3,5)$”，

则 $P(B_5)=\dfrac{2}{5}$，$P(B_3)=\dfrac{2}{5}$，$P(B_1)=1-\dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}$. (2 分)

记事件 C 为“该型号新能源汽车参加两项测试仅有一次为合格”，

则 $P(C)=P(A_5B_1)+P(A_3B_1)+P(A_1B_5)+P(A_1B_3)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{5}$

$=\dfrac{3}{10}$，

则该型号新能源汽车参加两项测试仅有一次为合格的概率为 $\dfrac{3}{10}$. (5 分)

(Ⅱ)由题知离散型随机变量 ξ 的所有可能取值分别为 2，4，6，8，10， (6 分)

$P(\xi=2)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{30}$，

$P(\xi=4)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{15}$， (7 分)

$P(\xi=6)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{10}$， (8 分)

$P(\xi=8)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{3}$， (9 分)

$P(\xi=10)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}$， (10 分)

则离散型随机变量 ξ 的分布列为

ξ	2	4	6	8	10
P	$\dfrac{1}{30}$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{5}$

(11 分)

所以数学期望 $E(\xi)=2\times\dfrac{1}{30}+4\times\dfrac{2}{15}+6\times\dfrac{3}{10}+8\times\dfrac{1}{3}+10\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{106}{15}$. (12 分)

21.【命题意图】本题考查函数的零点、不等式恒成立问题，考查推理论证能力、运算求解能力，考查数学抽象、逻辑推理、数学运算核心素养.

解：(Ⅰ)函数 $f(x)=xe^x-\ln x-x+a$ 有两个不同的零点，

即方程 $xe^x-\ln x-x+a=0$ 有两个不相等的正根， (1 分)

即方程 $e^{x+\ln x}-(\ln x+x)=-a$ 有两个不相等的正根. (2 分)

令 $t(x)=x+\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，

易知 $t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$t(x)\in\mathbf{R}$，

令 $t=t(x)\in\mathbf{R}$，则问题等价于方程 $e^t-t=-a$ 有两个不等的实根 t_1，t_2. (3 分)

令 $g(t)=e^t-t$，$t\in\mathbf{R}$，则 $g'(t)=e^t-1$，

令 $g'(t)=e^t-1=0$,解得 $t=0$,

当 $t\in(-\infty,0)$时,$g'(t)<0$,当 $t\in(0,+\infty)$时,$g'(t)>0$,

所以函数 $g(t)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增, (4 分)

且当 $t=0$ 时,函数 $g(t)$取得最小值 $g(0)=1$,

当 $t\to-\infty$时,$g(t)\to+\infty$,当 $t\to+\infty$时,$g(t)\to+\infty$,所以$-a>1$,

即当 $a<-1$ 时,方程 $e^t-t=-a$ 有两个不等的实根.

综上所述,实数 a 的取值范围是$(-\infty,-1)$. (5 分)

(Ⅱ)证明:由(Ⅰ)可设 $t_1<0<t_2$,

则 $g(t_1)=g(t_2)$.

令 $h(t)=g(t)-g(-t)=e^t-t-e^{-t}-t=e^t-e^{-t}-2t,t>0$, (6 分)

则 $h'(t)=e^t+e^{-t}-2>0$,

所以 $h(t)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

所以 $h(t)>h(0)=0$.

因为 $t_2>0$,所以 $h(t_2)=g(t_2)-g(-t_2)>0$,

即 $g(t_2)>g(-t_2)$,所以 $g(t_1)>g(-t_2)$. (7 分)

又函数 $g(t)$在$(-\infty,0)$上单调递减,且 $t_1<0,-t_2<0$,

所以 $t_1<-t_2$,即 $t_1+t_2<0$,

所以 $t_1+t_2=x_1+\ln x_1+x_2+\ln x_2<0$,

即 $\ln(x_1x_2)+(x_1+x_2)<0$.

因为 $\ln(x_1x_2)+(x_1+x_2)>2\ln\sqrt{x_1x_2}+2\sqrt{x_1x_2}$,

所以 $\ln\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_2}<0$. (8 分)

又因为 $\ln\frac{1}{\sqrt{e}}+\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{1}{2}>0$, (9 分)

所以 $\ln\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_2}<\ln\frac{1}{\sqrt{e}}+\frac{1}{\sqrt{e}}$. (10 分)

又由(Ⅰ)知函数 $t(x)=x+\ln x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,

所以 $\sqrt{x_1x_2}<\frac{1}{\sqrt{e}}$,即 $x_1x_2<\frac{1}{e}$, (11 分)

所以 $\ln(x_1x_2)<\ln\frac{1}{e}$,

所以 $\ln x_1+\ln x_2+1<0$. (12 分)

22.**【命题意图】**本题考查椭圆与双曲线的几何性质、直线与椭圆的位置关系、直线与双曲线的位置关系,考查推理论证能力、运算求解能力,考查数学运算、直观想象核心素养.

解:(Ⅰ)证明:依题意可知 $A(0,-a)$,$B(0,a)$,

联立$\begin{cases}y=t,\\ \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1,\end{cases}$

不妨取 $P\left(-\frac{b\sqrt{a^2-t^2}}{a},t\right)$,$Q\left(\frac{b\sqrt{a^2-t^2}}{a},t\right)$, (1 分)

则直线 AP 的方程为 $y=\frac{-a-t}{\frac{b\sqrt{a^2-t^2}}{a}}x-a$, ①

直线 BQ 的方程为 $y=\frac{a-t}{-\frac{b\sqrt{a^2-t^2}}{a}}x+a$, ②

(2 分)

联立①②可得$\begin{cases}x=-\frac{b\sqrt{a^2-t^2}}{t},\\ y=\frac{a^2}{t},\end{cases}$

即直线 AP,BQ 的交点坐标为$\left(-\frac{b\sqrt{a^2-t^2}}{t},\frac{a^2}{t}\right)$.

(3 分)

又$\frac{\left(\frac{a^2}{t}\right)^2}{a^2}-\frac{\frac{b^2}{t^2}(a^2-t^2)}{b^2}=1$成立,

所以直线 AP,BQ 的交点在双曲线 C 上. (4 分)

(Ⅱ)(ⅰ)因为过椭圆 τ 的一个焦点且与长轴垂直的弦长为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以$\frac{2b^2}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ③ (5 分)

因为双曲线 C 的一条渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$,

所以$\frac{a}{b}=\sqrt{3}$. ④ (6 分)

联立③④,解得 $b=1,a=\sqrt{3}$,

所以双曲线 C 的方程为$\frac{y^2}{3}-x^2=1$. （7 分）

（ⅱ）证明：由（ⅰ）得点 $F(0,2)$，$A(0,-\sqrt{3})$.

设直线 l 的斜率为 k，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则直线 l 的方程 $y=kx+2$，与双曲线$\frac{y^2}{3}-x^2=1$ 联立并消去 y 得$(k^2-3)x^2+4kx+1=0$，

则 $\Delta=12k^2+12>0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{-4k}{k^2-3}$，$x_1x_2=\frac{1}{k^2-3}<0$，

则 $k^2<3$，

故$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}}{3-k^2}$. （8 分）

又$|AF|=2+\sqrt{3}$，

所以 $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}|AF||x_1-x_2|$

$=\frac{1}{2}\times(2+\sqrt{3})\times\frac{2\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}}{3-k^2}$

$=3\sqrt{3}+6$，

解得 $k^2=2$ 或 $k^2=\frac{13}{3}$（舍去）.

因为 $S=\frac{1}{2}|OM||ON|\sin\theta$，

所以$\frac{S}{\tan\theta}=\frac{1}{2}\frac{|OM||ON|\sin\theta}{\tan\theta}$

$=\frac{1}{2}|OM||ON|\cos\theta$ （9 分）

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$

$=\frac{1}{2}x_1x_2+\frac{1}{2}y_1y_2$

$=\frac{1}{2}[x_1x_2+(kx_1+2)(kx_2+2)]$

$=\frac{1}{2}[(1+k^2)x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4]$

$=\frac{1}{2}\left(4+\frac{-7k^2+1}{k^2-3}\right)$.

因为 $k^2=2$，

所以$\frac{S}{\tan\theta}=\frac{17}{2}$， （11 分）

即 $2S\cos\theta=17\sin\theta$. （12 分）