

雅礼中学 2024 届高三月考试卷(五)

数 学

命题人:陈朝阳 审题人:伊波

得分:_____

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 8 页. 时量 120 分钟,满分 150 分.

第 I 卷

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{x | x^2 < 2\}$ 则 $A \cap B =$
A. $\{-1, 0\}$ B. $\{0, 1\}$
C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1\}$
2. 若实数 a, b 满足 $a^2 > b^2 > 0$, 则下列不等式中成立的是
A. $a > b$ B. $2^a > 2^b$
C. $a > |b|$ D. $\log_2 a^2 > \log_2 b^2$
3. 抛物线 $x^2 = 4y$ 上的点到其焦点的最短距离为
A. 4 B. 2 C. 1 D. $\frac{1}{2}$
4. 设向量 a, b 满足 $a + b = \sqrt{10}$, $a - b = \sqrt{6}$, 则 $a \cdot b =$
A. 1 B. 2 C. 3 D. 5
5. 已知 $\cos \alpha = \frac{1}{4}$, 则 $\sin 2(\alpha - \frac{\pi}{4}) =$
A. $-\frac{7}{8}$ B. $-\frac{\sqrt{15}}{8}$ C. $\frac{7}{8}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{8}$
6. 二维码与生活息息相关,我们使用的二维码主要是 21×21 大小的,即 441 个点,根据 0 和 1 的二进制编码,一共有 2^{441} 种不同的码,假设我们 1 秒钟用掉 1 万个二维码,1 万年约为 3×10^{11} 秒,那么大约可以用(参考数据: $\lg 2 \approx 0.3$, $\lg 3 \approx 0.5$)
A. 10^{117} 万年 B. 117 万年
C. 10^{205} 万年 D. 205 万年
7. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,给出以下条件,其中一定可以推出 $\{a_n\}$ 为等比数列的条件是
A. $S_n = 2a_n - 1$ B. $S_n = 2^n + 1$
C. $a_{n+1} = 2a_n$ D. $\{S_n\}$ 是等比数列



8. 拉格朗日中值定理是微分学的基本定理之一,定理内容如下:如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的图象连续不间断,在开区间 (a, b) 内的导数为 $f'(x)$,那么在区间 (a, b) 内至少存在一点 c ,使得 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ 成立,其中 c 叫做 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的“拉格朗日中值点”.根据这个定理,可得函数 $f(x) = (x-1)\ln x$ 在区间 $[1, 2]$ 上的“拉格朗日中值点”的个数为
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 有一组样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 由这组数据得到新样本数据 $y_1, y_2, \dots, y_n$, 其中 $y_i = cx_i + c (i=1, 2, \dots, n)$, c 为非零常数,则
- A. 两组样本数据的样本平均数可能相同
B. 两组样本数据的样本中位数一定不同
C. 两组样本数据的样本标准差可能相同
D. 两组样本数据的样本极差一定不同
10. 已知圆 $M: x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$, 则下列说法正确的是
- A. 点 $(4, 0)$ 在圆 M 内
B. 圆 M 关于直线 $x - 3y - 2 = 0$ 对称
C. 半径为 $\sqrt{3}$
D. 直线 $x - \sqrt{3}y = 0$ 与圆 M 相切
11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(xy) = \frac{f(x)}{y} + \frac{f(y)}{x}$, 则
- A. $f(1) = 0$ B. $f(2) = 1$
C. $f(x)$ 为奇函数 D. $f(x)$ 没有极值点
12. 在信道内传输 0, 1 信号,信号的传输相互独立,发送 0 时,收到 1 的概率为 $\alpha (0 < \alpha < 1, \alpha \neq 0.5)$, 收到 0 的概率为 $1 - \alpha$; 发送 1 时,收到 0 的概率为 $\beta (0 < \beta < 1, \beta \neq 0.5)$, 收到 1 的概率为 $1 - \beta$. 若在信道内依次发送信号 1, 0, 为了检验,收到信号的一端将收到的信号发回到输入端. 下列说法正确的是
- A. “收到的信号为 1, 0”是“传回的信号为 1, 0”的充分条件
B. “收到的信号为 1, 0”与“传回的信号为 1, 0”不一定是相互独立的
C. 若 $\alpha = \beta$, 则事件“传回的信号为 1, 0”的概率一定大于 0.25
D. 若 $\alpha = 0.8, \beta = 0.6$, 则事件“传回的信号为 1, 0”的概率为 31.68%

答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答案													

第Ⅱ卷

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若复数 $z = \frac{1}{1-i}$ ，则 $|z| =$ _____.

14. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的顶点坐标为 _____.

15. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上恰有一个极值点，则 ω 的取值范围是 _____.

16. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AA_1 = AB = 2AD = 2$ ， E, F 分别为 BB_1, D_1C_1 的中点，则平面 A_1BCD_1 被三棱锥 C_1-CEF 的外接球截得的截面圆面积为 _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。请在答题卡指定区域内作答。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_1 = 1, S_n = a_{n+1} - 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \frac{n}{a_{n+1}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .



18. (本小题满分 12 分)

已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\triangle ABC$ 的面积
为 $\frac{a^2}{4}$.

(1) 若 $\sin A = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 求 $\sin B \sin C$ 的值;

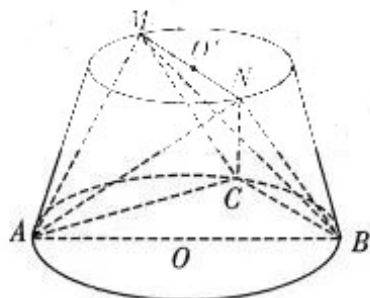
(2) 当角 A 为何值时, $\frac{c}{b} + \frac{b}{c}$ 取得最大值, 并求出该值.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 圆台下底面圆 O 的直径为 AB , C 是圆 O 上异于 A, B 的点, 且 $\angle BAC = 30^\circ$, MN 为上底面圆 O' 的一条直径, $\triangle MAC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形, $MB = 4$.

(1) 证明: $BC \perp$ 平面 MAC ;

(2) 求平面 MAC 和平面 NAB 夹角的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x - a(x-1)$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$, 求 a 的取值范围.



21. (本小题满分 12 分)

设 F_1, F_2 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 点 $P(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 E 上, 且点 P 和点 F_1 关于点 $C(0, \frac{3}{4})$ 对称.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 过右焦点 F_2 的直线 l 与椭圆相交于 A, B 两点, 过点 P 且平行于 AB 的直线与椭圆交于另一点 Q , 问是否存在直线 l , 使得四边形 $PABQ$ 的对角线互相平分? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

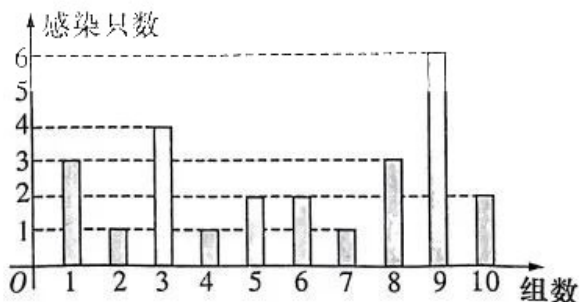


22. (本小题满分 12 分)

某制药公司研制了一款针对某种病毒的新疫苗. 该病毒一般通过病鼠与白鼠之间的接触传染, 现有 n 只白鼠, 每只白鼠在接触病鼠后被感染的概率为 $\frac{1}{2}$, 被感染的白鼠数用随机变量 X 表示, 假设每只白鼠是否被感染之间相互独立.

(1) 若 $P(X=5)=P(X=95)$, 求数学期望 $E(X)$;

(2) 接种疫苗后的白鼠被病鼠感染的概率为 p , 现有两个不同的研究团队理论研究发现概率 p 与参数 θ ($0 < \theta < 1$) 的取值有关. 团队 A 提出函数模型为 $p = \ln(1+\theta) - \frac{2}{3}\theta^2$. 团队 B 提出函数模型为 $p = \frac{1}{2}(1 - e^{-\theta})$. 现将 100 只接种疫苗后的白鼠分成 10 组, 每组 10 只, 进行实验, 随机变量 X_i ($i=1, 2, \dots, 10$) 表示第 i 组被感染的白鼠数, 将随机变量 X_i ($i=1, 2, \dots, 10$) 的实验结果 x_i ($i=1, 2, \dots, 10$) 绘制成频数分布图, 如图所示.



(i) 试写出事件“ $X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_{10}=x_{10}$ ”发生的概率表达式 (用 p 表示, 组合数不必计算);

(ii) 在统计学中, 若参数 $\theta=\theta_0$ 时使得概率 $P(X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_{10}=x_{10})$ 最大, 称 θ_0 是 θ 的最大似然估计. 根据这一原理和团队 A, B 提出的函数模型, 判断哪个团队的函数模型可以求出 θ 的最大似然估计, 并求出最大似然估计. 参考数据: $\ln \frac{3}{2} \approx 0.4055$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线