东莞中学、广州二中、惠州一中、深圳实验、珠海一中、中山纪念中学

2024届高三第四次六校联考试题

数学

命题人：惠州一中数学备课组　　　　　审题人：惠州一中数学备课组

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. $(x-3y)^5$展开式中第3项的系数是

A．90　　B．-90　　C．-270　　D．270

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_3+a_7=10$，$a_6=7$，则公差$d=$

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=2$，且$|\vec{a}|=1$，则向量$\vec{b}$在向量$\vec{a}$上的投影向量为

A．1　　B．-1　　C．$\vec{a}$　　D．$-\vec{a}$

4. 在$\triangle ABC$中，“$\tan A\tan B<1$”是“$\triangle ABC$为钝角三角形”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．已知三棱锥$P-ABC$，ΔABC是以AC为斜边的直角三角形，ΔPAC为边长是2的等边三角形，且平面$ABC\perp$平面PAC，则三棱锥$P-ABC$外接球的表面积为

A．$\dfrac{16}{3}\pi$　　B．$\dfrac{21}{3}\pi$　　C．$\dfrac{21}{2}\pi$　　D．8π

6．血氧饱和度是呼吸循环的重要生理参数．人体的血氧饱和度正常范围是$95\%\sim100\%$，当血氧饱和度低于90%时，需要吸氧治疗，在环境模拟实验室的某段时间内，可以用指数模型：$S(t)=S_0e^{Kt}$描述血氧饱和度$S(t)$随给氧时间t（单位：时）的变化规律，其中S_0为初始血氧饱和度，K为参数．已知$S_0=60\%$，给氧1小时后，血氧饱和度为80%．若使得血氧饱和度达到90%，则至少还需要给氧时间（单位：时）为　　（参考数据：$\ln 2\approx0.69,\ln 3\approx1.10$）

A．0.3　　B．0.5　　C．0.7　　D．0.9

7．已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左，右焦点分别为$F_1,F_2$，过$F_1$的直线与双曲线$C$分别在第一、二象限交于$A,B$两点，$\Delta ABF_2$内切圆的半径为$r$，若$|BF_1|=2a$，$r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$，则双曲线$C$的离心率为

A．$\sqrt{7}$　　B．$\dfrac{\sqrt{21}}{2}$　　C．$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{53}}{3}$

8．函数$f(x)=\sin 3x-\sin 2x$在开区间$(-\pi,2\pi)$的零点个数为

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9．给定数集$A=R$，$B=(0,+\infty)$，x,y满足方程$2^x-y=0$，下列对应关系f为函数的是

A．$f:A\to B,y=f(x)$　　B．$f:B\to A,y=f(x)$

C．$f:A\to B,x=f(y)$　　D．$f:B\to A,x=f(y)$

10．已知z为复数，设z，$\bar{z}$，iz在复平面上对应的点分别为A，B，C，其中O为坐标原点，则

A．$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$　　B．$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$　　C．$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$　　D．$\overrightarrow{OB}/\!/\overrightarrow{AC}$

11. 英国著名物理学家牛顿用"作切线"的方法求函数零点. 已知二次函数 $f(x)$ 有两个不相等的实根 b,c，其中 $c>b$. 在函数 $f(x)$ 图像上横坐标为 x_1 的点处作曲线 $y=f(x)$ 的切线，切线与 x 轴交点的横坐标为 x_2；用 x_2 代替 x_1，重复以上的过程得到 x_3；一直下去，得到数列 $\{x_n\}$. 记 $a_n=\ln\dfrac{x_n-b}{x_n-c}$，且 $a_1=1$，$x_n>c$，下列说法正确的是

A. $x_1=\dfrac{ec-b}{e-1}$（其中 $\ln e=1$）　　　　B. 数列 $\{a_n\}$ 是递减数列

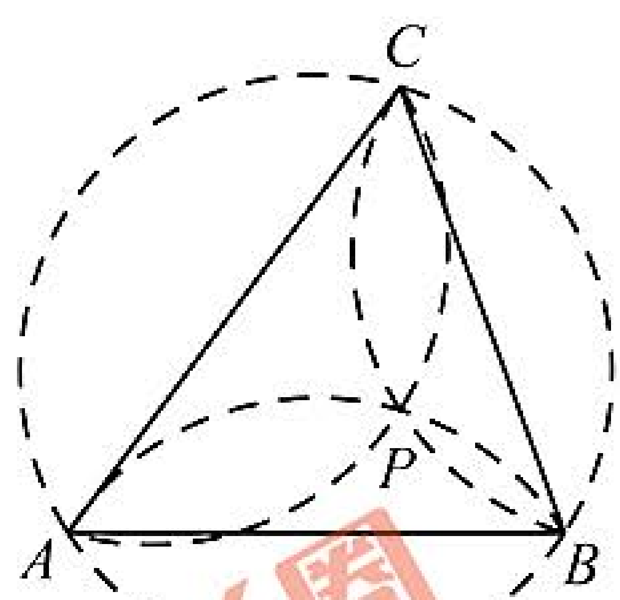
C. $a_6=\dfrac{1}{32}$　　　　D. 数列 $\{a_n+\dfrac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和 $S_n=2^n-2^{1-n}+1$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.将 1 到 10 这 10 个正整数平均分成甲、乙两组，每组 5 个正整数，且甲组的中位数比乙组的中位数小 1，则不同的平分方法共有________种.

13. 已知圆 $A:(x+2)^2+y^2=1$，圆 $B:(x-2)^2+y^2=4$，直线 $3x+4y+t=0$ 上存在点 P，过点 P 向圆 A 引两条切线 PC 和 PD，切点是 C 和 D，再过点 P 向圆 B 引两条切线 PE 和 PF，切点是 E 和 F，若 $\angle CPD=\angle EPF$，则实数 t 的取值范围为________.

14. 某同学在学习和探索三角形相关知识时，发现了一个有趣的性质：将锐角三角形三条边所对的外接圆的三条圆弧（劣弧）沿着三角形的边进行翻折，则三条圆弧交于该三角形内部一点，且此交点为该三角形的垂心（即三角形三条高线的交点）. 如图，已知锐角 ΔABC 外接圆的半径为2，且三条圆弧沿 ΔABC 三边翻折后交于点 P. 若 $AB=3$，则 $\sin\angle PAC=$________；若 $AC:AB:BC=6:5:4$，则 $PA+PB+PC$ 的值为________.



四、解答题:本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

已知椭圆 C_1，抛物线 C_2 的焦点均在 x 轴上，C_1 的中心和 C_2 的顶点均为坐标原点 O，从 C_1，C_2 上分别取两个点，将其坐标记录于下表中：

x	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2
y	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	2	0	$2\sqrt{2}$

（1）求 C_1 和 C_2 的标准方程；

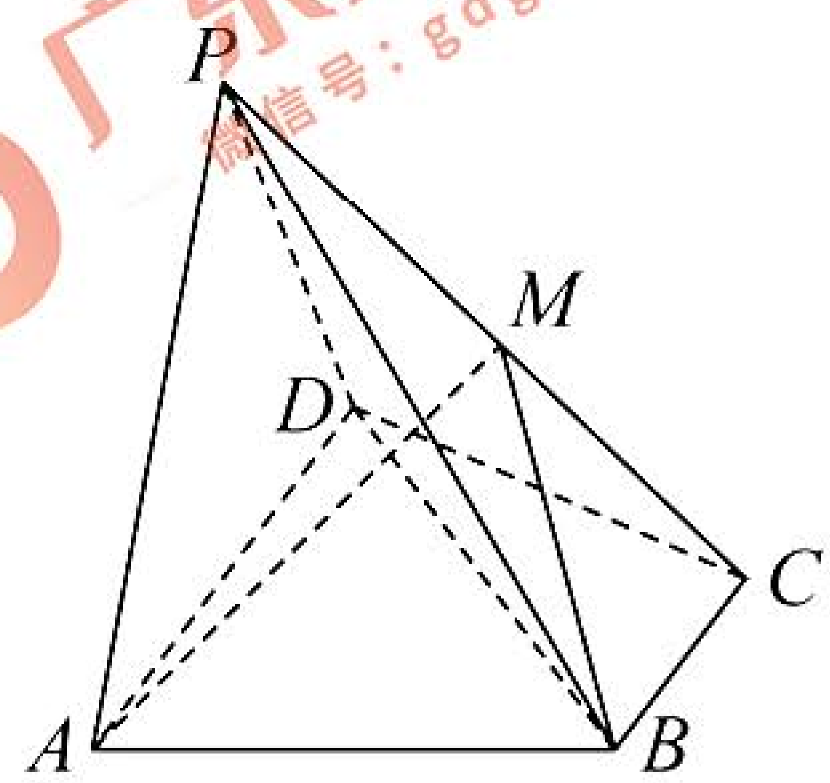
（2）若 C_1 和 C_2 交于不同的两点 A,B，求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的值.

16.（本小题满分 15 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，ΔPAD 为正三角形，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AD // BC$，$AD \perp CD, AD = 2BC = 2, CD = \sqrt{3}, PB = \sqrt{6}$.

（1）求证：平面 PAD ⊥ 平面 $ABCD$；

（2）点 M 为棱 PC 的中点，求 BM 与平面 PCD 所成角的正弦值



17.（本小题满分 15 分）

某公司是一家集无人机特种装备的研发、制造与技术服务的综合型科技创新企业．该公司生产的甲、乙两种类型无人运输机性能都比较出色，但操控水平需要十分娴熟，才能发挥更大的作用．已知在单位时间内，甲、乙两种类型无人运输机操作成功的概率分别为 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{1}{2}$，假设每次操作能否成功相互独立．

（1）随机选择两种无人运输机中的一种，求选中的无人运输机操作成功的概率．

（2）操作员连续进行两次无人机的操作有两种方案：

方案一：在初次操作时，随机选择两种无人运输机中的一种，若初次操作成功，则第二次继续使用该类型设备；若初次操作不成功，则第二次使用另一类型进行操作．

方案二：在初次操作时，随机选择两种无人运输机中的一种，无论初次操作是否成功，第二次均使用初次所选择的无人运输机进行操作．

假定方案选择及操作不相互影响，试比较这两种方案的操作成功的次数的期望值．

18.（本小题满分 17 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}+\cos x-2$，$g(x)=\sin x$.

（1）求证：当 $x\in(0,+\infty)$，$g(x)<x<f(x)$；

（2）若 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)+g(x)>ax$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

19.（本小题满分 17 分）

已知集合 A 中含有三个元素 x,y,z，同时满足① $x<y<z$；② $x+y>z$；③ $x+y+z$ 为偶数，那么称集合 A 具有性质 P.

已知集合 $S_n=\{1,2,3,\cdots,2n\}\ (n\in N^*,n\geq 4)$，对于集合 S_n 的非空子集 B，若 S_n 中存在三个互不相同的元素 a,b,c，使得 $a+b,b+c,c+a$ 均属于 B，则称集合 B 是集合 S_n 的“期待子集”.

（1）试判断集合 $A=\{1,2,3,5,7,9\}$ 是否具有性质 P，并说明理由.

（2）若集合 $B=\{3,4,a\}$ 具有性质 P，证明：集合 B 是集合 S_4 的“期待子集”.

（3）证明：集合 M 具有性质 P 的充要条件是集合 M 是集合 S_n 的“期待子集”.