

大联考湖南师大附中 2024 届高三月考试卷(五)

数 学

时量:120 分钟 满分:150 分

得分:\_\_\_\_\_

学 号 \_\_\_\_\_  
姓 名 \_\_\_\_\_  
班 级 \_\_\_\_\_  
校 学 \_\_\_\_\_

题 答 要 不 内 线 封 密

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

1. 已知集合  $A = \{a^2, -a\}$ ,  $B = \{-1, 9\}$ , 若  $A \cup B = \{-1, 1, 9\}$ , 则  $a =$

- A. 3                      B. 1                      C. -1                      D. -3

2. 已知复数  $z = \frac{1-i}{i-2i^2-i^3}$ , 则  $\bar{z}$  的虚部为

- A. -1                      B.  $-\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D. 1

3. 二项式  $(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x^4})^7$  的展开式中常数项为

- A. -7                      B. -21                      C. 7                      D. 21

4. 已知函数  $f(x) = \frac{(a-1)x^3 + (2-a)x^2}{2^x + 2^{-x}}$  为偶函数, 则  $a =$

- A. 2                      B. 1                      C. -1                      D. -2

5. 已知  $F$  为双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左焦点, 直线  $y = 3x + 3a$  与  $C$  交于  $A, B$  两点, 且  $BF \perp x$  轴, 则  $C$  的离心率为

- A.  $\sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{3}$                       C. 2                      D. 3

6. 已知函数  $f(x) = \cos x + a \ln x$  在区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递增, 则  $a$  的最小值为

- A.  $\frac{\pi}{8}$                       B.  $\frac{\pi}{4}$                       C.  $\frac{\pi}{2}$                       D.  $\pi$

7. 已知  $\sin \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\cos \alpha - \sin \beta = -\frac{1}{3}$ , 则  $\cos(2\alpha - 2\beta) =$

- A.  $\frac{47}{81}$                       B.  $-\frac{47}{81}$                       C.  $\frac{17}{81}$                       D.  $-\frac{17}{81}$

8. 在数列  $\{a_n\}$  中的相邻两项  $a_n$  与  $a_{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$  之间插入一个首项为  $a_n - \frac{1}{n}$ , 公差为  $-\frac{1}{n}$  的等差数列的前  $n$  项, 记构成的新数列为  $\{b_n\}$ , 若  $a_n = \frac{2}{n+1}$ , 则  $\{b_n\}$  前 65 项的和为

- A.  $-\frac{25}{2}$                       B. -13                      C.  $-\frac{27}{2}$                       D. -14

二、选择题(本大题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.)

9. 已知  $S$  为圆锥的顶点,  $AB$  为该圆锥的底面圆  $O$  的直径,  $\angle SAB=45^\circ$ ,  $C$  为底面圆周上一点,  $\angle BAC=60^\circ$ ,  $SC=\sqrt{2}$ , 则

- A. 该圆锥的体积为  $\frac{\pi}{3}$
- B.  $AC=\sqrt{3}$
- C. 该圆锥的侧面展开图的圆心角大于  $180^\circ$
- D. 二面角  $A-BC-S$  的正切值为  $\sqrt{2}$

10. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 直线  $y = x + \sqrt{2}$  经过  $C$  的一个焦点和一个顶点, 且与  $C$  交于  $A, B$  两点(点  $A$  在第三象限), 则

- A.  $a=2b$
- B.  $\triangle ABF_2$  的周长为 8
- C.  $|AB| = \frac{8}{3}$
- D. 以  $AF_2$  为直径的圆过点  $B$

11. 若函数  $f(x) = ax + b \ln x - \frac{c}{x} (a \neq 0)$  在  $x=c$  处取得极值, 则

- A.  $b^2 - 4ac > 0$
- B.  $ac + b$  为定值
- C. 当  $a < 0$  时,  $f(x)$  有且仅有一个极大值
- D. 若  $f(x)$  有两个极值点, 则  $x = \frac{1}{a}$  是  $f(x)$  的极小值点

12. 今年是共建“一带一路”倡议提出十周年. 某校进行“一带一路”知识了解情况的问卷调查, 为调动学生参与的积极性, 凡参与者均有机会获得奖品. 设置 3 个不同颜色的抽奖箱, 每个箱子中的小球大小相同质地均匀, 其中红色箱子中放有红球 3 个, 黄球 2 个, 绿球 2 个; 黄色箱子中放有红球 4 个, 绿球 2 个; 绿色箱子中放有红球 3 个, 黄球 2 个, 要求参与者先从红色箱子中随机抽取一个小球, 将其放入与小球颜色相同的箱子中, 再从放入小球的箱子中随机抽取一个小球, 抽奖结束. 若第二次抽取的是红色小球, 则获得奖品, 否则不能获得奖品, 已知甲同学参与了问卷调查, 则

- A. 在甲先抽取的是黄球的条件下, 甲获得奖品的概率为  $\frac{4}{7}$
- B. 在甲先抽取的不是红球的条件下, 甲没有获得奖品的概率为  $\frac{5}{14}$
- C. 甲获得奖品的概率为  $\frac{24}{49}$
- D. 若甲获得奖品, 则甲先抽取绿球的机会最小

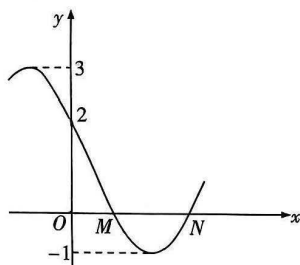
三、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.)

13. 已知向量  $\mathbf{a}=(1,-1)$ , 向量  $\mathbf{b}$  满足  $|2\mathbf{b}-\mathbf{a}|=2|\mathbf{b}|$ , 则  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=\underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 已知正三棱台的上、下底面边长分别为  $\sqrt{3}$  和  $3\sqrt{3}$ , 它的一个侧面的面积为  $2\sqrt{6}$ , 则该正三棱台的体积为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

15. 已知直线  $x-y+1=0$  与圆  $C:(x-m)^2+y^2=8$  交于  $A, B$  两点, 则满足“ $\triangle ABC$  的面积为  $2\sqrt{3}$ ”的  $m$  的一个值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

16. 已知函数  $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B(A>0, \omega>0, 0<\varphi<\pi)$  的部分图象如图所示, 且  $|MN|=\frac{3}{2}$ , 则不等式  $f(x)\geq 1+\sqrt{2}$  在区间  $[0, 4]$  上的解集为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .



四、解答题(本大题共 6 个小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 10 分)

记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\tan B = \frac{1}{3} \tan C$ .

(1) 求  $\frac{c^2-b^2}{a^2}$  的值;

(2) 若  $a=\sqrt{6}$ , 且  $\triangle ABC$  的周长为  $3+\sqrt{6}$ , 求边  $b$  上的高.

18. (本小题满分 12 分)

记  $S_n$  为正项数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 且  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $2S_n = (3^n - 1)a_n$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = \frac{a_{n+1}}{(1-a_n)S_{n+1}}$ , 记数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 证明:  $T_n \geq \frac{3}{8}$ .

19. (本小题满分 12 分)

2

为检验预防某种疾病的 A、B 两种疫苗的免疫效果,随机抽取接种 A、B 疫苗的志愿者各 100 名,化验其血液中某项医学指标(该医学指标范围为  $[0,100]$ ),统计如下:

该项医学指标	$[0,25)$	$[25,50)$	$[50,75)$	$[75,100]$
接种 A 疫苗人数	$10+m$	10	50	$30-m$
接种 B 疫苗人数	$10-m$	30	40	$20+m$

个别数据模糊不清,用含字母  $m(m \in \mathbf{N})$  的代数式表示.

- (1)为检验该项医学指标在  $[0,50)$  内的是否需要接种加强针,先从医学指标在  $[25,50)$  的志愿者中,按接种 A、B 疫苗分层抽取 8 人,再次抽血化验进行判断.从这 8 人中随机抽取 4 人调研医学指标低的原因,记这 4 人中接种 B 疫苗的人数为  $X$ ,求  $X$  的分布列与数学期望;
- (2)根据(1)化验研判结果,医学认为该项医学指标低于 50,产生抗体较弱,需接种加强针,该项医学指标不低于 50,产生抗体较强,不需接种加强针.

请先完成下面的  $2 \times 2$  列联表,若根据小概率  $\alpha=0.025$  的独立性检验,认为接种 A、B 疫苗与志愿者产生抗体的强弱有关联,求  $m$  的最大值.

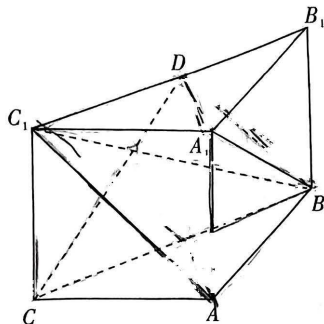
疫苗	抗体		合计
	抗体弱	抗体强	
A 疫苗			
B 疫苗			
合计			

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n=a+b+c+d.$$

$\alpha$	0.25	0.025	0.005
$x_\alpha$	1.323	5.024	7.879

20. (本小题满分 12 分)

如图,在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $BC=\sqrt{2}AA_1$ , 点  $D$  为  $B_1C_1$  上一点,且  $CD\perp BC_1$ .



(1)证明:  $AC_1\parallel$ 平面  $A_1BD$ ;

(2)若  $AC=AB$ ,求直线  $CD$  与平面  $A_1BD$  所成角的正弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知抛物线  $E$  的顶点在坐标原点,对称轴为坐标轴,且经过  $A_1(2,1)$ ,  $A_2(-2,2)$ ,  $A_3(-1, \frac{1}{4})$  三点中的两点.

(1)求抛物线  $E$  的方程;

(2)设  $O$  为坐标原点,  $E$  的焦点为  $F$ ,过  $F$  的直线  $BC$  与  $E$  交于  $B, C$  两点,过  $F$  的直线  $PQ$  与  $E$  交于  $P, Q$  两点,点  $P, B$  都在第二象限,记直线  $BC, PQ$  的倾斜角分别为  $\alpha, \beta$ ,且  $|\alpha-\beta|=90^\circ$ . 若直线  $PB$  与直线  $CQ$  交于点  $M$ ,不同于点  $M$  的点  $N$  满足  $MN\perp y$  轴,当  $ON\parallel PQ$  时,设  $\triangle NBC, \triangle OBC$  的面积分别为  $m, n$ ,求  $\frac{m-n}{mn}$  的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = a \ln x - x^2 - (2-a)x$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的极值;

(2) 设  $f(x)$  的导函数为  $f'(x)$ , 若  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$  为  $f(x)$  的两个零点,

证明:  $\frac{f(x_2)}{f'(x_1)} > -1$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: [www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线