沧衡名校联盟高三年级2023—2024学年上学期期末联考

数学·答案

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.

1. B　2. D　3. A　4. C　5. B　6. C

7. D　8. C

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.每小题全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. BD　10. AC　11. BCD　12. ACD

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. $\frac{21}{11}$　14. 2

15. $2\sqrt{2}$　16. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

四、解答题:共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **解析**　(Ⅰ)设$\{a_n\}$的公差为d.

由$\begin{cases}a_3=7,\\a_5+a_6=29,\end{cases}$得$\begin{cases}a_1+2d=7,\\2a_1+9d=29,\end{cases}$ ……(2分)

解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=3,\end{cases}$ ……(4分)

所以$a_n=1+3(n-1)=3n-2$. ……(5分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知$a_1=1,a_2=4$,

则$a_1+b_1=1,a_2+b_2=2$. ……(6分)

因为$\{b_n+a_n\}$是等比数列,所以公比为$\frac{a_2+b_2}{a_1+b_1}=\frac{2}{1}=2$, ……(7分)

所以$b_n+a_n=2^{n-1}$, ……(8分)

所以$b_n=2^{n-1}-(3n-2)=2^{n-1}+2-3n$. ……(9分)

所以$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}+2n-\frac{3n(n+1)}{2}=2^n-1-\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$. ……(10分)

18. **解析**　记内角A,B,C的对边分别为a,b,c.

(Ⅰ)因为$\sin B\sin C+\sin^2C=\cos^2B-\cos^2A$,

所以$\sin B\sin C+\sin^2C=\sin^2A-\sin^2B$, ……(1分)

由正弦定理得$bc+c^2=a^2-b^2$, ……(3分)

故由余弦定理可得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$, ……(5分)

因为$0<A<\pi$,所以$A=\frac{2\pi}{3}$. ……(6分)

(Ⅱ)因为 AD 平分 $\angle BAC$,所以 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$, …………(7 分)

因为 $AB=2AC$,所以 $BD=2CD$,所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$, …………(9 分)

所以 $\frac{1}{2}c\cdot AD\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$, …………(10 分)

即 $\frac{1}{2}\times4\times AD\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times2\times\sin\frac{2\pi}{3}$,

所以 $AD=\frac{4}{3}$. …………(12 分)

19. **解析** (Ⅰ)如图,连接 AC.

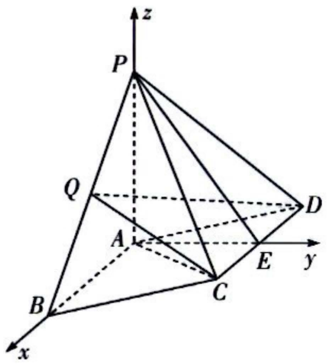
由已知可得 $\triangle ACD$ 为正三角形,又 E 为 CD 的中点,所以 $CD\perp AE$. …………(1 分)

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $CD\perp PA$. …………(2 分)

因为 $PA\cap AE=A$,所以 $CD\perp$ 平面 PAE, …………(4 分)

因为 $CD\subset$ 平面 QCD,所以平面 $QCD\perp$ 平面 PAE. …………(5 分)

(Ⅱ)由已知得 $\angle BAE=\frac{\pi}{2}$,所以 AB,AE,AP 两两互相垂直,以 A 为坐标原点,AB,AE,AP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,如图. …………(6 分)



设 $AD=2$,则 $A(0,0,0)$,$P(0,0,2)$,$B(2,0,0)$,$E(0,\sqrt{3},0)$,$Q(1,0,1)$,

$\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$,$\overrightarrow{QE}=(-1,\sqrt{3},-1)$,$\overrightarrow{PE}=(0,\sqrt{3},-2)$. …………(8 分)

设平面 QCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{EC}\cdot\boldsymbol{n}=x=0,\\ \overrightarrow{QE}\cdot\boldsymbol{n}=-x+\sqrt{3}y-z=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(0,1,\sqrt{3})$. …………(10 分)

设直线 PE 与平面 QCD 所成的角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PE},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PE}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$. …………(12 分)

20. **解析** (Ⅰ)由题意,前 4 次闪光的顺序为“红黄蓝红”或“红蓝黄红”, …………(2 分)

所以 $P=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$. …………(5 分)

(Ⅱ)设事件 A_n 表示“第 n 次闪光为红光”,事件 B_n 表示“第 n 次闪光为黄光”,事件 C_n 表示“第 n 次闪光为蓝

光”，且 $P(A_n)=f(n)$，$P(B_n)=g(n)$，则 $P(C_n)=1-f(n)-g(n)$，

由题意知 $f(1)=P(A_1)=1$，…………（6分）

当 $n\geqslant 2$ 时，$P(A_n)=P(B_{n-1})P(A_n|B_{n-1})+P(C_{n-1})P(A_n|C_{n-1})$，…………（7分）

即 $f(n)=\frac{1}{4}g(n-1)+\frac{1}{4}[1-f(n-1)-g(n-1)]$，整理得 $f(n)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}f(n-1)$，…………（8分）

所以 $f(n)-\frac{1}{5}=-\frac{1}{4}\left[f(n-1)-\frac{1}{5}\right]$，

所以 $\left\{f(n)-\frac{1}{5}\right\}$ 是以 $f(1)-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ 为首项，$-\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列，…………（10分）

所以 $f(n)-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$，

故 $P(A_n)=f(n)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}$，即第 n 次闪红光的概率为 $\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}$.…………（12分）

21. **解析**（Ⅰ）因为 E 是关于 x 轴和 y 轴均对称的等轴双曲线，故可设其方程为 $x^2-y^2=\lambda$，…………（1分）

又 E 经过点 $(4,2\sqrt{3})$，所以 $\lambda=4^2-(2\sqrt{3})^2=4$，…………（3分）

所以 E 的方程为 $x^2-y^2=4$，即 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$.…………（4分）

（Ⅱ）因为 $A(m,n)$ 在 E 上，所以 $m^2-n^2=4$.…………（5分）

联立方程得 $\begin{cases}x^2-y^2=4,\\ mx-ny=8,\end{cases}$ 消去 x 整理可得 $(m^2-n^2)y^2-16ny+4m^2-64=0$，

将 $m^2=4+n^2$ 代入，可得 $y^2-4ny+n^2-12=0$.…………（6分）

所以 $\Delta=16n^2-4(n^2-12)=12n^2+48>0$.

设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=4n$，$y_1y_2=n^2-12$，…………（7分）

所以 $|BC|=\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2}|y_2-y_1|=\sqrt{\frac{m^2+n^2}{m^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\frac{m^2+n^2}{4+n^2}}\sqrt{16n^2-4(n^2-12)}$

$=\sqrt{12(m^2+n^2)}$.…………（9分）

点 A 到直线 BC 的距离为 $d=\frac{|m^2-n^2-8|}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{4}{\sqrt{m^2+n^2}}$，…………（10分）

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}|BC|d=\frac{1}{2}\times\sqrt{12(m^2+n^2)}\times\frac{4}{\sqrt{m^2+n^2}}=4\sqrt{3}$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积为定值 $4\sqrt{3}$.…………（12分）

22. **解析**（Ⅰ）$f'(x)=1-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}$，…………（1分）

由 $f'(x)=0$，得 $\cos\frac{\pi x}{2}=\frac{2}{\pi}$，当 $x\in(-1,1)$ 时，$\frac{\pi x}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\frac{\pi x}{2}=\pm\theta$，即 $x=\pm\frac{2\theta}{\pi}$，…………（2分）

当 $-\frac{2\theta}{\pi}<x<\frac{2\theta}{\pi}$ 时 $f'(x)<0$，当 $-1<x<-\frac{2\theta}{\pi}$ 或 $\frac{2\theta}{\pi}<x<1$ 时，$f'(x)>0$，…………（3分）

所以 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内的单调递减区间为 $\left(-\frac{2\theta}{\pi},\frac{2\theta}{\pi}\right)$.…………（4分）

（Ⅱ）依题意，$g(x)=x-\sin\frac{\pi x}{2}-a\ln|x|$，定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

（ⅰ）当 $x<0$ 时，有 $g(-1)=0$. ………………………………………………………………（5 分）

当 $x<-1$ 时，$-\sin\frac{\pi x}{2}\leqslant 1$，$-a\ln|x|<0$，所以 $g(x)<0$；

当 $-1<x<0$ 时，由（Ⅰ）知 $f(x)$ 在 $\left(-1,-\frac{2\theta}{\pi}\right)$ 单调递增，在 $\left(-\frac{2\theta}{\pi},0\right)$ 单调递减，

又 $f(-1)=f(0)=0$，所以 $f(x)=x-\sin\frac{\pi x}{2}>0$，又 $-a\ln|x|>0$，所以 $g(x)>0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 总有唯一的零点 -1. ……………………………………………（7 分）

（ⅱ）当 $x>0$ 时，有 $g(1)=0$，$g'(x)=1-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{a}{x}$，$g'(1)=1-a$.

若 $a=1$，有 $g(x)=x-\ln x-\sin\frac{\pi x}{2}\geqslant 1-\sin\frac{\pi x}{2}\geqslant 0$，当且仅当 $x=1$ 时两个不等号中的等号同时成立，

可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有且仅有 1 个零点 1，符合题意. ……………………………………（8 分）

若 $a>1$，有 $g'(x)$ 在 $(1,2)$ 单调递增，$g'(2)=1+\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}$.

①若 $g'(2)\leqslant 0$，则当 $x\in(1,2)$ 时，有 $g'(x)<0$；

②若 $g'(2)>0$，又 $g'(1)<0$，则可知 $\exists x_1\in(1,2)$，使得 $g'(x_1)=0$.

由①②，可知 $g(x)$ 在 $(1,x_1)$ 单调递减，所以 $g(x_1)<g(1)=0$，

又当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 至少有 1 个零点，

则可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 至少有 2 个零点，不符合题意. ……………………………………（9 分）

若 $0<a<1$，有 $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，又 $g'(1)>0$，$g'\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}-2a<0$，

则可知 $\exists x_2\in(0,1)$，使得 $g'(x_2)=0$，且 $g(x)$ 在 $(x_2,1)$ 单调递增，则有 $g(x_2)<g(1)=0$，

又当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to+\infty$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 至少有 1 个零点，

则可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 至少有 2 个零点，不符合题意. ……………………………………（11 分）

综上可知，$a=1$. ………………………………………………………………………………（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。