保密★使用前

泉州市2024届高中毕业班质量监测（二）

2024.01

高 三 数 学

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（10分）

等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$中，$a_1=b_1=2$，$a_3+b_3=5$，$a_5+2b_2=0$.

（1）求$\{a_n\}$的公差d；

（2）记数列$\{a_nb_n\}$的前n项和为S_n，若$a_n>0$，求S_n.

【命题意图】本小题主要考查等差数列、等比数列与数列求和等知识，考查运算求解等能力，考查函数与方程、化归与转化等思想，体现基础性，导向对发展数学运算等核心素养的关注.

【试题解析】

解法一：

（1）设等比数列$\{b_n\}$的公比为q，由题意，得$\begin{cases}2+2d+2q^2=5,\\2+4d+4q=0,\end{cases}$ ……2分

整理，得$\begin{cases}2q^2+2d=3,\\2q+2d+1=0,\end{cases}$ ……3分

解得$\begin{cases}q=-1,\\d=\frac{1}{2},\end{cases}$或$\begin{cases}q=2,\\d=-\frac{5}{2},\end{cases}$

故$d=\frac{1}{2}$或$d=-\frac{5}{2}$. ……5分

（2）由（1），得$\begin{cases}q=-1,\\d=\frac{1}{2},\end{cases}$或$\begin{cases}q=2,\\d=-\frac{5}{2},\end{cases}$

因为$a_n>0$，所以$d>0$，故$\begin{cases}q=-1,\\d=\frac{1}{2},\end{cases}$

从而$a_n=\frac{n+3}{2}$，$b_n=2\cdot(-1)^{n-1}$， ……7分

$a_nb_n=(n+3)\times(-1)^{n-1}$，

所以 $S_{20}=(4-5)+(6-7)+\cdots+(22-23)=-10$．……………………………………10 分

解法二：

（1） 设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，由题意，得 $\begin{cases}2+2d+2q^2=5,\\2+4d+4q=0,\end{cases}$ ……………………………2 分

整理，得 $\begin{cases}2q^2+2d=3,\\2q+2d+1=0,\end{cases}$ ……………………………………………………………………3 分

消去 q，得 $4d^2+8d-5=0$，…………………………………………………………………4 分

解得 $d=\dfrac{1}{2}$ 或 $d=-\dfrac{5}{2}$．……………………………………………………………………5 分

（2） 由（1），得 $\begin{cases}q=-1,\\d=\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}q=2,\\d=-\dfrac{5}{2},\end{cases}$

因为 $a_n>0$，所以 $d>0$，故 $\begin{cases}q=-1,\\d=\dfrac{1}{2},\end{cases}$

从而 $a_n=\dfrac{n+3}{2}$，$b_n=2\cdot(-1)^{n-1}$，…………………………………………………………7 分

$a_nb_n=(n+3)\times(-1)^{n-1}$，

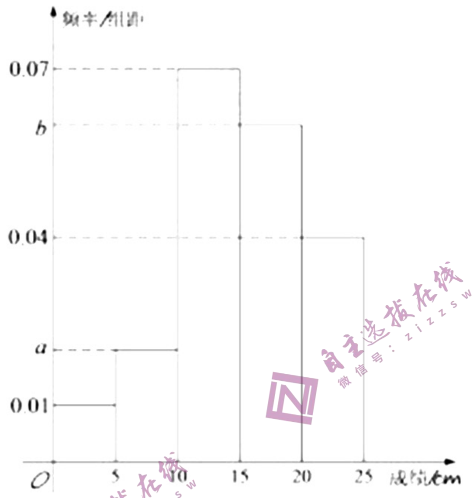
所以 $S_{20}=(4+6+8+\cdots+22)-(5+7+9+\cdots+23)=\dfrac{10\times(4+22)}{2}-\dfrac{10\times(5+23)}{2}=-10$．

……10 分

18．（12 分）

教育部印发的《国家学生体质健康标准》，要求学校每学年开展全校学生的体质健康测试工作．某中学为提高学生的体质健康水平，组织了“坐位体前屈”专项训练．现随机抽取高一男生和高二男生共 60 人进行“坐位体前屈”专项测试．

高一男生成绩的频率分布直方图如图所示，其中成绩在$[5,10)$的男生有 4 人．



高二男生成绩（单位：cm）如下：

10.2	12.8	6.4	6.6	14.3	8.3	16.8	15.9	9.7	17.5
18.6	18.3	19.4	23.0	19.7	20.5	24.9	20.5	25.1	17.5

（1）估计高一男生成绩的平均数和高二男生成绩的第 40 百分位数；

（2）《国家学生体质健康标准》规定，高一男生“坐位体前屈”成绩良好等级线为 15 cm，高二男生为 16.1 cm．

已知该校高一年男生有 600 人，高二年男生有 500 人，完成下列2×2列联表，依据小概率值$\alpha=0.005$的独立性检验，能否认为该校男生“坐位体前屈”成绩优良等级与年级有关？

等级 / 年级	良好及以上	良好以下	合计
高一			
高二			
合计			

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$．

α	0.05	0.010	0.005	0.001
x_α	3.841	6.635	7.879	10.828

【命题意图】本题主要考查频率分布直方图、平均数、百分位数、独立性检验等知识；考查

运算求解、数据处理等能力；考查数形结合等思想；体现基础性与应用性，导向对发展数据分析、数学运算、数学建模等核心素养的关注.

【试题解析】

（1） 依题意得，抽取高二男生 20 人，所以抽取高一男生 40 人.…………………………1 分

因为高一男生成绩在 $[5,10)$ 的男生有 4 人，所以 $a\times 5=\frac{4}{40}=0.1$，解得 $a=0.02$.

由 $(0.01+a+0.07+b+0.04)\times 5=1$，解得 $b=0.06$.…………………………2 分

由样本估计总体，可估计高一年男生成绩的平均数

$\overline{x}_1=(2.5\times 0.01+7.5\times 0.02+12.5\times 0.07+17.5\times 0.06+22.5\times 0.04)\times 5$ …………………………3 分

$=12.5+(-10\times 0.05-5\times 0.1+0\times 0.35+5\times 0.3+10\times 0.2)=15$.…………………………4 分

由 $20\times 0.4=8$，可知样本数据的第 40 百分位数是第 8 项和第 9 项数据的均值，

…………………………5 分

高二年男生"坐位体前屈"成绩在 $[5,15)$ 有 7 人，$[15,20)$ 有 8 人，

所以第 40 百分位数 m 在 $[15,20)$ 中，故 $m=\frac{15.9+16.8}{2}=16.35$，

由样本估计总体，可估计高二年男生成绩的第 40 百分位数为 16.35. …………………………6 分

（2） 根据样本，知高一男生成绩良好及以上占 50%，良好以下占 50%，高二男生成绩良好及以上占 $\frac{12}{20}=60\%$，良好以下占 $\frac{8}{20}=40\%$，由样本估计总体，可得 2×2 列联表如下：

	良好及以上	良好以下	合计
高一	300	300	600
高二	300	200	500
合计	600	500	1100

…………………………8 分

零假设为 H_0：该校男生"坐位体前屈"成绩等级与年级之间无关.

根据列联表中的数据，得 $\chi^2=\frac{1100(300\times 200-300\times 300)^2}{600\times 500\times 600\times 500}=11>7.879=x_{0.005}$ ……11 分

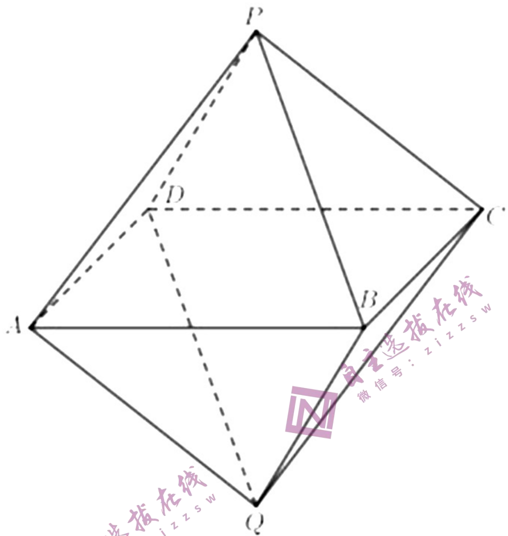
根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为"坐位体前屈"成绩等级与年级有关，此推断犯错误的概率不大于 0.005.…………………………12 分

19.（12 分）

如图，两个棱长均等于 2 的正四棱锥拼接得到多面体 $PABCDQ$.

（1）求证：PA // 平面 QBC ；

（2）求平面 PCD 与平面 QBC 的夹角的正弦值.



【命题意图】本小题主要考查直线、平面间的平行，平面与平面的夹角等知识；考查空间想象能力、推理论证及运算求解等能力；考查数形结合、化归与转化等思想；体现基础性、综合性与应用性，导向对发展逻辑推理、数学运算、直观想象等核心素养的关注.

【试题解析】

解法一：

（1）连结 AC,BD ，交于点 O ，连结 PO,QO ，易证 $PO\perp$ 平面 $ABCD$ ，$QO\perp$ 平面 $ABCD$ ，

所以 P,O,Q 三点共线，…………………………………………………………………1 分

因为 $PQ\cap AC=O$ ，所以 PQ,AC 确定平面 $PAQC$ ，………………………………2 分

又因为 $PA=PC=2$ ，$AC=2\sqrt{2}$ ，

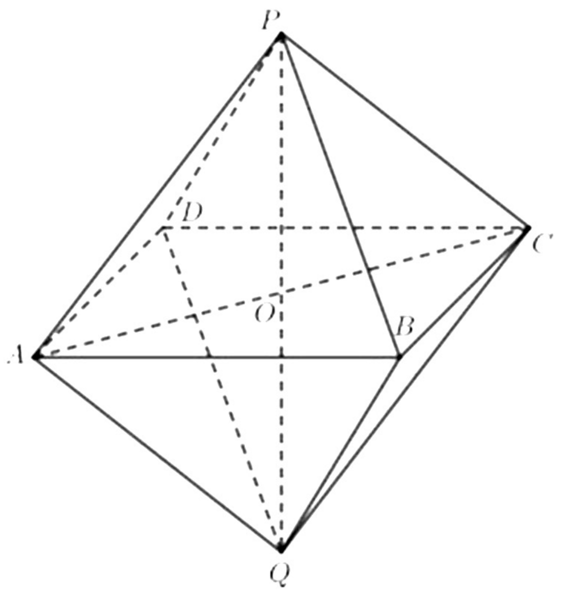
所以 $PA^2+PC^2=AC^2$ ，故 $\angle APC=90^\circ$ ，且 $\angle PAC=\angle PCA=45^\circ$ ，

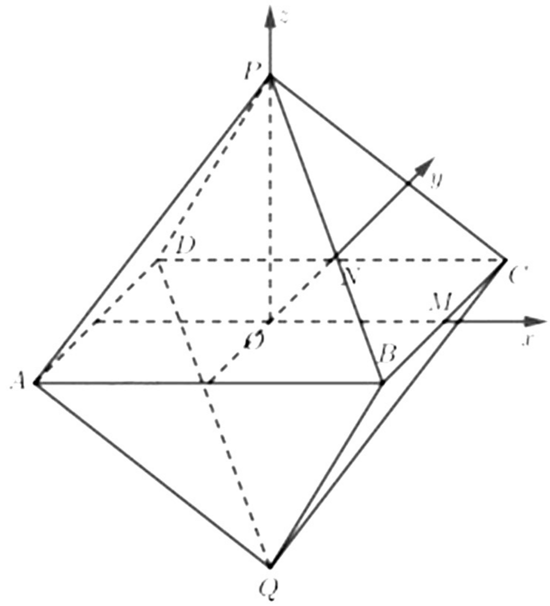
同理，可得 $\triangle QAC$ 中 $\angle AQC=90^\circ$ ，且 $\angle QAC=\angle QCA=45^\circ$ ，…………………… 3 分

故 $\angle PAQ+\angle AQC=180^\circ$ ，从而 $PA// QC$ ，…………………………………………5 分

又 $PA\not\subset$ 平面 QBC ，$QC\subset$ 平面 QBC ，

所以 $PA//$ 平面 QBC . ………………………………………………………………………6 分





（2） 分别取 BC,CD 的中点，$AC\cap BD=O$，由题意，可知 OP,OM,ON 两两垂直，

……7 分

以 O 为原点，分别以 $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $Oxyz$，

则 $P(0,0,\sqrt{2})$，$D(-1,1,0)$，$C(1,1,0)$，$B(1,-1,0)$，$Q(0,0,-\sqrt{2})$，

从而 $\overrightarrow{PC}=(1,1,-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{PD}=(-1,1,-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{QC}=(1,1,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{QB}=(1,-1,\sqrt{2})$ …………8 分

设平面 PCD 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{PC},\\ \boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{PD},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+y_1-\sqrt{2}z_1=0,\\ -x_1+y_1-\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$

整理，得 $\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=\sqrt{2}z_1,\end{cases}$ 令 $z_1=1$，得 $\boldsymbol{n}_1=(0,\sqrt{2},1)$，…………………………………9 分

设平面 QBC 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{QB},\\ \boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{QC},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_2+y_2+\sqrt{2}z_2=0,\\ x_2-y_2+\sqrt{2}z_2=0,\end{cases}$

整理，得 $\begin{cases}x_2=-\sqrt{2}z_2,\\ y_2=0,\end{cases}$ 令 $z_2=1$，得 $\boldsymbol{n}_2=(-\sqrt{2},0,1)$，…………………………………10 分

$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$，…………………………………………11 分

设平面 PCD 与平面 QBC 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\left|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle\right|=\dfrac{1}{3}$，

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．…………………………………………………12 分

解法二：

（1） 连结 AC,BD，交于点 O，连结 PO,QO，易证 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，$QO\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 P,O,Q 三点共线，易证得 PQ,AC,BD 两两垂直，且交于点 O．··················1 分

以 O 为原点，分别以 $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OP}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $Oxyz$，

·· 2 分

则 $P(0,0,\sqrt{2})$，$A(0,-\sqrt{2},0)$ $D(-\sqrt{2},0,0)$，$C(0,\sqrt{2},0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$Q(0,0,-\sqrt{2})$，

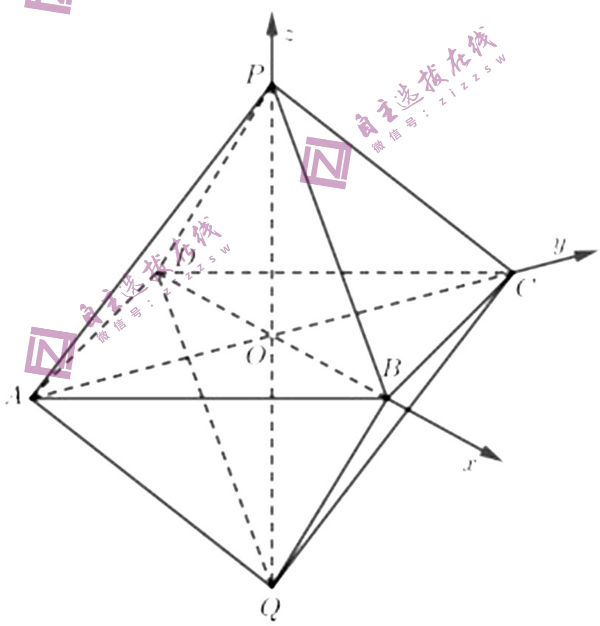
从而 $\overrightarrow{PA}=(0,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{QC}=(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$，

故 $\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{QC}$，··· 3 分

又 $A\notin QC$，所以 $PA// QC$，··4 分

又 $PA\not\subset$ 平面 QBC，$QC\subset$ 平面 QBC，

所以 $PA//$ 平面 QBC．···6 分



（2） 由（1），得 $\overrightarrow{PC}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{PD}=(-\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{QC}=(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{QB}=(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$

设平面 PCD 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{PC},\\ \boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{PD},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{2}y_1-\sqrt{2}z_1=0,\\ -\sqrt{2}x_1-\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$

整理，得 $\begin{cases}y_1=z_1,\\ x_1=-z_1,\end{cases}$ 令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}_1=(-1,1,1)$，·····································8 分

设平面 QBC 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{QB},\\ \boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{QC},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{2}x_2+\sqrt{2}z_2=0,\\ \sqrt{2}y_2+\sqrt{2}z_2=0,\end{cases}$

整理，得 $\begin{cases}x_2=-z_2,\\ y_2=-z_2,\end{cases}$ 令 $z_2=1$，得 $\boldsymbol{n}_2=(-1,-1,1)$，……………………………10 分

$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1-1+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$，……………………………11 分

设平面 PCD 与平面 QBC 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\left|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle\right|=\dfrac{1}{3}$，

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．……………………………12 分

解法二：

（1） 连结 AC,BD，交于点 O，连结 PO,QO，易证 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，$QO\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 P,O,Q 三点共线，……………………………1 分

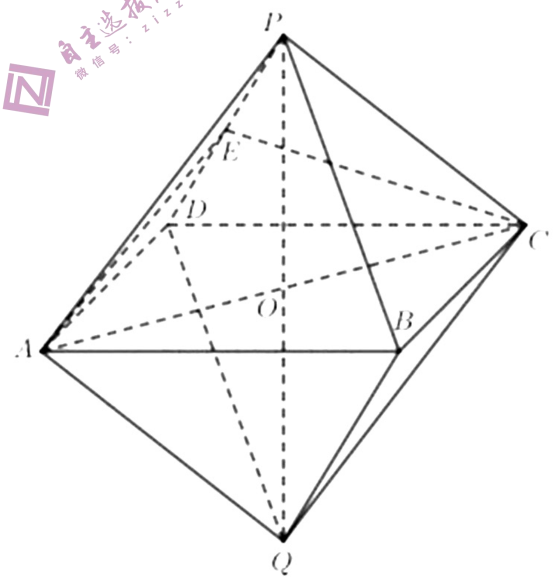
因为 $PQ\cap AC=O$，所以 PQ,AC 确定平面 $PAQC$，……………………………2 分

又 $PO=OQ$，$AO=OC$，所以四边形 $PAQC$ 平行四边形，……………………………3 分

所以 $PA//QC$，……………………………4 分

又 $PA\not\subset$ 平面 QBC，$QC\subset$ 平面 QBC，……………………………5 分

所以 $PA//$ 平面 QBC．……………………………6 分



（2） 设平面平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}$，平面 QBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，平面 QBC 与平面 PCD 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\left|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle\right|$．……………………………7 分

由（1）知 $PA//$ 平面 QBC，同理，可得 $PD//$ 平面 QBC，

又 $PA,PD\subset$ 平面 PAD，且 $PA\cap PD=P$，所以平面 $PAD//$ 平面 QBC，

所以平面 QBC 的法向量 $\boldsymbol{m}$ 是平面 PAD 的法向量，

设平面 PAD 与平面 PCD 的夹角为 α，则 $\cos\alpha=\left|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle\right|$，

从而 $\cos\alpha=\cos\theta$，……………………………………………………………………… 8 分

取 PD 的中点 E，连结 AE,CE，则 $AE\perp PD$，$CE\perp PD$，

又 $E\in PD$，$AE\subset$ 平面 APD，$CE\subset$ 平面 CPD，

所以 $\angle AEC$ 是二面角 $A-PD-C$ 的平面角，……………………………………………10 分

在 $\triangle ACE$ 中，$AC=2\sqrt{2}$，$AE=CE=\sqrt{3}$，

由余弦定理，得 $\cos\angle AEC=\dfrac{EA^2+EC^2-AC^2}{2\cdot EA\cdot EC}$，即 $\cos\angle AEC=\dfrac{3+3-8}{2\cdot 3}=-\dfrac{1}{3}$，

从而 $\cos\theta=\left|\cos\angle AEC\right|=\dfrac{1}{3}$，……………………………………………………………… 11 分

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．…………………………………………………………… 12 分

保密★使用前

泉州市 2024 届高中毕业班质量监测（二）

高 三 数 学

20.（12 分）

一个袋子中有10个大小相同的球，其中红球7个，黑球3个. 每次从袋中随机摸出1个球，摸出的球不再放回.

（1）求第2次摸到红球的概率；

（2）设第1,2,3次都摸到红球的概率为P_1；第1次摸到红球的概率为P_2；在第1次摸到红球的条件下，第2次摸到红球的概率为P_3；在第1，2次都摸到红球的条件下，第3次摸到红球的概率为P_4. 求P_1,P_2,P_3,P_4；

（3）对于事件A,B,C，当$P(AB)>0$时，写出$P(A),P(B|A),P(C|AB),P(ABC)$的等量关系式，并加以证明.

【命题意图】本小题主要考查条件概率、全概率公式等知识；考查运算求解、推理论证等能力；考查化归与转化等思想. 体现基础性、应用性和综合性，导向对发展数学运算、数学抽象等核心素养的关注.

【试题解析】

解法一：

（1）记事件"第i次摸到红球"为$A_i\ (i=1,2,3,\cdots,10)$，则第2次摸到红球的事件为A_2，……1 分

于是由全概率公式，得$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})$……………………3 分

$$=\frac{7}{10}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{10}.$$……………………………………4 分

（2）由已知，得$P_1=P(A_1A_2A_3)=\frac{A_7^3}{A_{10}^3}=\frac{7}{24}$，……………………………………5 分

$P_2=P(A_1)=\frac{7}{10}$，…………………………………………………………6 分

$P_3=P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{A_7^2}{A_{10}^2}\times\frac{10}{7}=\frac{7}{15}\times\frac{10}{7}=\frac{2}{3}$，……………………………7 分

$$P_4=P\left(A_3\middle|A_1A_2\right)=\frac{P\left(A_1A_2A_3\right)}{P\left(A_1A_2\right)}=\frac{7}{24}\times\frac{15}{7}=\frac{5}{8}$$.…………………………………………… 8 分

（3） 由（2）可得 $P_1=P_2P_3P_4$，即 $P\left(A_1A_2A_3\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2\middle|A_1\right)P\left(A_3\middle|A_1A_2\right)$，

可猜想：$P(ABC)=P(A)P\left(B\middle|A\right)P\left(C\middle|AB\right)$，………………………………………9 分

证明如下：由条件概率及 $P(A)>0,P(AB)>0$，

得 $P\left(B\middle|A\right)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，$P\left(C\middle|AB\right)=\dfrac{P(ABC)}{P(AB)}$，………………………………10 分

所以 $P(A)P\left(B\middle|A\right)P\left(C\middle|AB\right)=P(A)\cdot\dfrac{P(AB)}{P(A)}\cdot\dfrac{P(ABC)}{P(AB)}=P(ABC)$.…… 12 分

解法二：

（1） 记事件"第 i 次摸到红球"为 $A_i\left(i=1,2,3,\cdots,10\right)$，则第2次摸到红球的事件为 A_2，……… 1 分

于是 $A_2=A_1A_2\cup\overline{A_1}A_2$，………………………………………………………………2 分

故 $P\left(A_2\right)=P\left(A_1A_2\cup\overline{A_1}A_2\right)=P\left(A_1A_2\right)+P\left(\overline{A_1}A_2\right)$ ……………………………………… 3 分

$$=\frac{C_7^1\cdot C_6^1}{A_{10}^2}+\frac{C_3^1\cdot C_7^1}{A_{10}^2}=\frac{42}{90}+\frac{21}{90}=\frac{7}{10}$$ ……………………………………………4 分

（2） 设事件"第1,2,3次都摸到红球"，事件"第1次摸到红球"，事件"第1次摸到红球的条件下第2次摸到红球"，事件"第1、2次均摸到红球的条件下第3次摸到红球"的四个事件的事件样本点个数和样本空间的样本点个数分别为 n_i，$N_i\left(i=1,2,3,4\right)$，则由古典概型计算公式，得

$P_1=\dfrac{n_1}{N_1}=\dfrac{A_7^3}{A_{10}^3}=\dfrac{7}{24}$，………………………………………………………………5 分

$P_2=\dfrac{n_2}{N_2}=\dfrac{7}{10}$，…………………………………………………………………………6 分

$P_3=\dfrac{n_3}{N_3}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$，………………………………………………………………………7 分

$P_4=\dfrac{n_4}{N_4}=\dfrac{5}{8}$.…………………………………………………………………………8 分

（3） 同解法一．………………………………………………………………………………12 分

21.（12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c． 已知 $b=\sqrt{3}$， $\dfrac{\sin(B+C)}{\sin B+\sin C}=\dfrac{b-c}{a-c}$．

（1）若 $C=\dfrac{\pi}{6}$，求 a；

（2）点 D 是 $\triangle ABC$ 外一点， AC 平分 $\angle BAD$，且 $\angle ADC=\dfrac{2}{3}\pi$，求 $\triangle BCD$ 的面积的取值范围．

【命题意图】本小题主要考查解三角形、三角恒等变换、导数的应用等知识，考查推理论证、运算求解等能力，考查数形结合和化归与转化等思想，体现综合性与应用性，导向对发展直观想象、逻辑推理及数学运算等核心素养的关注．

【试题解析】

解法一：

（1） 在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin B}=2R$，

所以 $\sin A=\dfrac{a}{2R}$， $\sin B=\dfrac{b}{2R}$， $\sin C=\dfrac{c}{2R}$，

又 $A+B+C=\pi$，得 $B+C=\pi-A$，故 $\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$，

所以 $\dfrac{\sin(B+C)}{\sin B+\sin C}=\dfrac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\dfrac{a}{b+c}$，

从而 $\dfrac{\sin(B+C)}{\sin B+\sin C}=\dfrac{b-c}{a-c}$， 可化为 $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b-c}{a-c}$， ……………………………………… 1 分

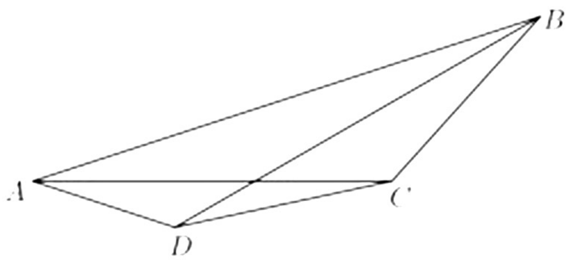
整理，得 $a^2+c^2-b^2=ac$，…………………………………………………………………2 分

由余弦定理，得 $\cos B=\dfrac{BA^2+BC^2-AC^2}{2\cdot BA\cdot BC}=\dfrac{1}{2}$，

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$，

又 $C=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $A=\pi-(B+C)=\dfrac{\pi}{2}$，

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中， $b=\sqrt{3}$， $C=\dfrac{\pi}{6}$，且 $\cos C=\dfrac{b}{a}$，解得 $a=2$． ………………… 6 分



（2）由（1）得，$B=\frac{\pi}{3}$，

因为 AC 平分 $\angle BAD$，且 $\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$，故设 $\angle BAC=\angle DAC=\theta,\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，得 $\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin\theta}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{BC}{\sin\theta}$，解得 $BC=2\sin\theta$，

在 $\triangle ADC$ 中，由正弦定理，得 $\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{CD}{\sin\theta}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{CD}{\sin\theta}$，解得 $CD=2\sin\theta$，

又四边形 $ABCD$ 中，$B=\frac{\pi}{3}$，$\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$，$\angle BAD=2\theta$，所以 $\angle BCD=\pi-2\theta$，

所以 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin\angle BCD$

$=2\sin^2\theta\cdot\sin(\pi-2\theta)$

$=2\sin^2\theta\cdot\sin 2\theta$

$=(1-\cos 2\theta)\sin 2\theta$

$=\sin 2\theta-\frac{1}{2}\sin 4\theta$ ……………………………………………………9 分

令 $f(x)=\sin 2x-\frac{1}{2}\sin 4x,x\in[0,\frac{\pi}{3}]$，则

$f'(x)=2\cos 2x-2\cos 4x$

$=-2(\cos 2x-1)\cdot(2\cos 2x+1)$ ……………………………………………………10 分

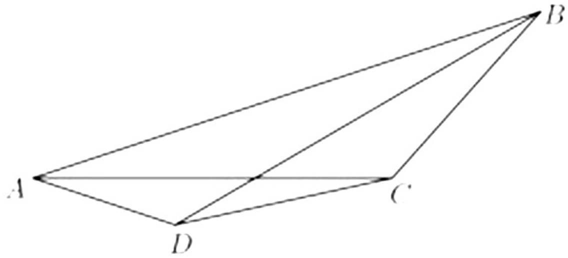
从而 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{3}]$ 单调递增，……………………………………11 分

又 $f(0)=0$，$f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

所以当 $\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$ 时，$f(0)<f(\theta)<f(\frac{\pi}{3})$，即 $0<f(\theta)<\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

所以 $\triangle BCD$ 的面积取值范围为 $(0,\frac{3\sqrt{3}}{4})$．……………………………………12 分

解法二：（1）同解法一；……………………………………………………………………6 分



（2）四边形 $ABCD$ 中，由（1）得 $B=\frac{\pi}{3}$，又 $\angle ADC=\frac{2}{3}\pi$，

所以 $\angle B+\angle ADC=\pi$，从而 A,B,C,D 四点共圆，

又因为 AC 平分 $\angle BAD$，所以 $BC=CD$，

设 $BC=CD=x(0<x<\sqrt{3})$，所以 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}x^2\cdot\sin\angle BCD$ ……………………………… 8 分

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，得 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，化简，得 $\sin\angle BAC=\frac{1}{2}x$，

故 $\cos\angle BAC=\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}$，

又四边形 $ABCD$ 中，$B=\frac{\pi}{3}$，$\angle ADC=\frac{2}{3}\pi$，所以 $\angle BCD=\pi-\angle BAD$

所以 $\sin\angle BCD=\sin\angle BAD$，

又 AC 平分 $\angle BAD$，所以 $\sin\angle BAD=\sin 2\angle BAC=2\sin\angle BAC\cos\angle BAC=x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}$

所以 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}x^2\cdot x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}$，……………………………………………………… 9 分

所以 $S^2_{\triangle BCD}=\frac{1}{4}x^6\cdot(1-\frac{1}{4}x^2)$，其中 $0<x^2<3$，

令 $f(t)=\frac{1}{4}t^3(1-\frac{1}{4}t)=\frac{1}{4}t^3-\frac{1}{16}t^4, t\in[0,3]$，则 $f'(t)=\frac{3}{4}t^2-\frac{1}{4}t^3=\frac{1}{4}t^2(3-t)\geqslant 0$，

所以 $f(t)$ 在 $[0,3]$ 上单调递增，

又 $f(0)=0, f(3)=\frac{27}{16}$，…………………………………………………………………… 11 分

故 $0<S_{\triangle BCD}{}^2<\frac{27}{16}$，

所以 $\triangle BCD$ 的面积取值范围为 $(0,\frac{3\sqrt{3}}{4})$．…………………………………… 12 分

22．（12 分）

动圆 C 与圆 $C_1:(x+\sqrt{5})^2+y^2=4$ 和圆 $C_2:(x-\sqrt{5})^2+y^2=4$ 中的一个内切，另一个外切，记点 C 的轨迹为 E.

（1）求 E 的方程；

（2）已知点 $M(1,t)$（$\frac{3}{4}<t<\frac{3}{2}$），$x$ 轴与 E 交于 A、B 两点，直线 AM 与 E 交于另一点 P，直线 BM 与 E 交于另一点 Q，记△ABM、△PQM 的面积分别为 S_1, S_2．若 $S_2=\frac{49}{15}S_1$，求直线 PQ 的方程.

【命题意图】本小题主要考查双曲线的定义，双曲线的标准方程，圆与圆的位置关系、直线与双曲线的位置关系等知识；考查运算求解、逻辑推理等能力；考查数形结合、函数与方程等思想；体现基础性、综合性与创新性，导向对直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养的关注.

【试题解析】

解法一：

（1）由题意，得两圆半径都为2，圆心分别为 $C_1(-\sqrt{5},0)$、$C_2(\sqrt{5},0)$.

设圆 C 的半径为 R，由题意得 $R=|CC_1|-2=|CC_2|+2$ 或 $R=|CC_2|-2=|CC_1|+2$，

故 $\left||CC_1|-|CC_2|\right|=4<2\sqrt{5}=|C_1C_2|$，……1分

所以点 C 的轨迹是以 C_1, C_2 为焦点，实轴长为4的双曲线，……2分

其中 $a=2, c=\sqrt{5}, b=\sqrt{c^2-a^2}=1$，……3分

【3分点：写出两个值可得此分；方程写对，这一步可不写】

所以轨迹 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.……4分

（2）由题意，得得 $A(-2,0)$, $B(2,0)$，$k_{AM}=\frac{t}{3}$，$k_{BM}=-t$，

所以直线 AM 的方程为 $y=\frac{t}{3}(x+2)$，直线 BM 的方程为 $y=-t(x-2)$.……5分

设点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases} y=\dfrac{t}{3}(x+2), \\ \dfrac{x^2}{4}-y^2=1, \end{cases}$ 消去 y，得 $(9-4t^2)x^2-16t^2x-16t^2-36=0$，…………………………6分

由 $x_A\cdot x_P=\dfrac{-16t^2-36}{9-4t^2}$，$x_A=-2$，$x_P=x_1$，得 $x_1=\dfrac{8t^2+18}{9-4t^2}$，

从而 $y_1=\dfrac{t}{3}(\dfrac{8t^2+18}{9-4t^2}+2)=\dfrac{12t}{9-4t^2}$，故 $P(\dfrac{8t^2+18}{9-4t^2},\dfrac{12t}{9-4t^2})$，…………………………7分

由$\begin{cases} y=-t(x-2), \\ \dfrac{x^2}{4}-y^2=1, \end{cases}$ 消去 y，得 $(1-4t^2)x^2+16t^2x-16t^2-4=0$，

由 $x_B\cdot x_Q=\dfrac{-16t^2-4}{1-4t^2}$，$x_B=2$，$x_Q=x_2$，得 $x_2=\dfrac{8t^2+2}{4t^2-1}$，

从而 $y_2=-t(\dfrac{8t^2+2}{4t^2-1}-2)=\dfrac{-4t}{4t^2-1}$，故 $Q(\dfrac{8t^2+2}{4t^2-1},\dfrac{-4t}{4t^2-1})$，…………………………8分

因为 $\triangle ABM$，$\triangle PQM$ 的面积分别为 S_1,S_2，且 $S_2=\dfrac{49}{15}S_1$，$\sin\angle PMQ=\sin\angle AMB$

所以 $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\frac{1}{2}|MP|\cdot|MQ|\sin\angle PMQ}{\frac{1}{2}|MA|\cdot|MB|\sin\angle AMB}=\dfrac{|MP|\cdot|MQ|}{|MA|\cdot|MB|}=\dfrac{|x_1-1|\cdot|x_2-1|}{|1-(-2)|\cdot|1-2|}=\dfrac{|(x_1-1)(x_2-1)|}{3}$

$=\dfrac{\left|(\frac{8t^2+18}{9-4t^2}-1)(\frac{8t^2+2}{4t^2-1}-1)\right|}{3}=\dfrac{1}{3}\left|\dfrac{(12t^2+9)(4t^2+3)}{(9-4t^2)(4t^2-1)}\right|=\left|\dfrac{(4t^2+3)^2}{(9-4t^2)(4t^2-1)}\right|$，…………………………9分

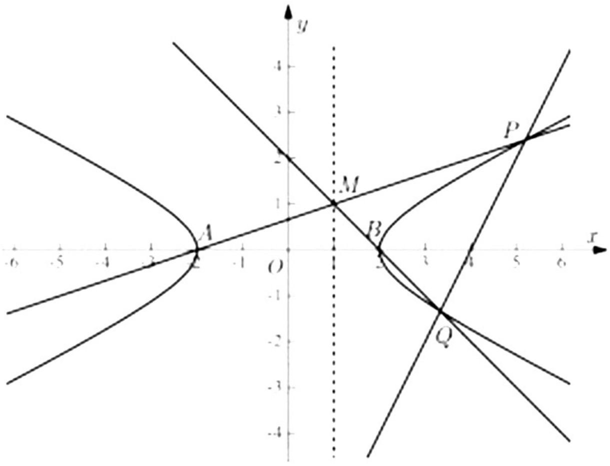
由 $S_2=\dfrac{49}{15}S_1$，得 $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{49}{15}$ 即 $\left|\dfrac{(4t^2+3)^2}{(9-4t^2)(4t^2-1)}\right|=\dfrac{49}{15}$，

又因为 $\dfrac{3}{4}<t<\dfrac{3}{2}$，所以 $\dfrac{(4t^2+3)^2}{(9-4t^2)(4t^2-1)}=\dfrac{49}{15}$，

化简，得 $t^2=1$，解得 $t=1$，…………………………10分

当 $t=1$ 时，$P(\dfrac{26}{5},\dfrac{12}{5})$，$Q(\dfrac{10}{3},-\dfrac{4}{3})$，…………………………11 分

所以直线 PQ 的方程为 $2x-y-8=0$．…………………………12 分



解法二：

（1） 由题意，得两圆半径都为2，圆心分别为$C_1(-\sqrt{5},0)$、$C_2(\sqrt{5},0)$．

设圆C的半径为R，由题意得$R=|CC_1|-2=|CC_2|+2$或$R=|CC_2|-2=|CC_1|+2$，

故$||CC_1|-|CC_2||=4$ 即$|CC_1|-|CC_2|=\pm4$．……………………………………………… 1 分

当$|CC_1|-|CC_2|=4$时，设$C(x,y)$，则

$\sqrt{(x+\sqrt{5})^2+y^2}-\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2}=4(x>0)$， ……………2 分【代入距离公式即给分】

即$\sqrt{(x+\sqrt{5})^2+y^2}=4+\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2}$．

两边平方，得$(x+\sqrt{5})^2+y^2=16+8\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2}+(x-\sqrt{5})^2+y^2$，

整理，得$\sqrt{5}x-4=2\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2}$，

上式两边再平方并整理得$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1(x>0)$，……………………………………………… 2 分

当$|CC_1|-|CC_2|=-4$时，同理，可得$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1(x<0)$，……………………………………3分

综上，轨迹E的方程为$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$．……………………………………………………………… 4分

（2） 由题意，得得$A(-2,0)$，$B(2,0)$，$k_{AM}=\dfrac{t}{3}$，$k_{BM}=-t$，

所以直线AM的方程为$x=\dfrac{3}{t}y-2$，直线BM的方程为$x=-\dfrac{1}{t}y+2$． ……………… 5分

设点$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$．

由 $\begin{cases} x=\dfrac{3}{t}y-2, \\ \dfrac{x^2}{4}-y^2=1, \end{cases}$ 消去 x，得 $(\dfrac{9}{t^2}-4)y^2-\dfrac{12}{t}y=0$，

由韦达定理，得 $y_1=\dfrac{\dfrac{12}{t}}{\dfrac{9}{t^2}-4}=\dfrac{12t}{9-4t^2}$， $x_1=\dfrac{3}{t}(\dfrac{12t}{9-4t^2})-2=\dfrac{8t^2+18}{9-4t^2}$，

所以 $P(\dfrac{8t^2+18}{9-4t^2},\dfrac{12t}{9-4t^2})$； ………………………………………………………………7分

由 $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{t}y+2, \\ \dfrac{x^2}{4}-y^2=1, \end{cases}$ 消去 x，得 $(\dfrac{1}{t^2}-4)y^2-\dfrac{4}{t}y=0$，

从而 $y_2=\dfrac{\dfrac{4}{t}}{\dfrac{1}{t^2}-4}=\dfrac{-4t}{4t^2-1}$， $x_2=-\dfrac{1}{t}(\dfrac{-4t}{4t^2-1})+2=\dfrac{8t^2+2}{4t^2-1}$，

所以 $Q(\dfrac{8t^2+2}{4t^2-1},\dfrac{-4t}{4t^2-1})$． ………………………………………………………………8分

因为 $\triangle ABM$ ， $\triangle PQM$ 的面积分别为 S_1， S_2，且 $S_2=\dfrac{49}{15}S_1$， $\sin\angle PMQ=\sin\angle AMB$

所以 $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\dfrac{1}{2}|MP|\cdot|MQ|\sin\angle PMQ}{\dfrac{1}{2}|MA|\cdot|MB|\sin\angle AMB}=\dfrac{|MP|\cdot|MQ|}{|MA|\cdot|MB|}=\dfrac{|y_1-t|\cdot|y_2-t|}{|t-0|\cdot|t-0|}$

$$=\frac{\left|\dfrac{12t}{9-4t^2}-t\right|\cdot\left|\dfrac{-4t}{4t^2-1}-t\right|}{|t^2|}=\left|\frac{(4t^2+3)^2}{(9-4t^2)(4t^2-1)}\right|.$$ ……………………………………9分

由 $S_2=\dfrac{49}{15}S_1$ 得 $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{49}{15}$ 即 $\left|\dfrac{(4t^2+3)^2}{(9-4t^2)(4t^2-1)}\right|=\dfrac{49}{15}$，

因为 $\dfrac{3}{4}<t<\dfrac{3}{2}$，所以 $\dfrac{(4t^2+3)^2}{(9-4t^2)(4t^2-1)}=\dfrac{49}{15}$，化简，得 $t^2=1$，解得 $t=1$， ………10分

当 $t=1$ 时， $P(\dfrac{26}{5},\dfrac{12}{5})$， $Q(\dfrac{10}{3},-\dfrac{4}{3})$， ……………………………………………………11 分

所以直线 PQ 的方程为 $2x-y-8=0$． ……………………………………………………12分

解法三：

（2）由题意，得得 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，$k_{AM}=\dfrac{t}{3}$，$k_{BM}=-t$，故 $k_{BM}=-3k_{AM}$，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $\dfrac{y_2}{x_2-2}=-3\times\dfrac{y_1}{x_1-2}$.

由 $\dfrac{x_1^2}{4}-y_1^2=1$，得 $\dfrac{y_1}{x_1-2}\times\dfrac{y_1}{x_1+2}=\dfrac{1}{4}$，所以 $\dfrac{y_2}{x_2-2}\times\dfrac{y_1}{x_1-2}=-\dfrac{3}{4}$. ……………………5 分

设直线 PQ 的方程为 $x=my+n$，

由 $\begin{cases}x=my+n,\\ \dfrac{x^2}{4}-y^2=1,\end{cases}$，消去 x，得 $(m^2-4)y^2+2mny+n^2-4=0$，

因为方程有两个不同的实数根，所以 $\begin{cases}m^2-4\neq0,\\ \Delta>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m^2-4\neq0,\\ (2mn)^2-4(m^2-4)(n^2-4)>0,\end{cases}$

整理，得 $\begin{cases}m^2\neq4,\\ m^2+n^2>4,\end{cases}$

由韦达定理，得 $y_1+y_2=\dfrac{-2mn}{m^2-4}$，$y_1y_2=\dfrac{n^2-4}{m^2-4}$ ……………………………………6 分

由 $\dfrac{y_2}{x_2-2}\times\dfrac{y_1}{x_1-2}=-\dfrac{3}{4}$ 得 $\dfrac{y_2}{my_2+n-2}\times\dfrac{y_1}{my_1+n-2}=-\dfrac{3}{4}$

即 $\dfrac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+m(n-2)(y_1+y_2)+(n-2)^2}=-\dfrac{3}{4}$

将 $y_1+y_2=\dfrac{-2mn}{m^2-4}$，$y_1y_2=\dfrac{n^2-4}{m^2-4}$，代入以上等式，

整理，得 $\dfrac{n^2-4}{-4n^2+16n-16}=-\dfrac{3}{4}$，解得 $n=4$，

所以直线 PQ 的方程为 $x=my+4$，故直线 PQ 恒过点 $(4,0)$，……………………7 分

从而 $y_1-t=\dfrac{t}{3}(x_1+2)-t=\dfrac{t}{3}(x_1-1)=\dfrac{t}{3}(my_1+3)$，

$y_2-t=-t(x_2-2)-t=-t(x_2-1)=-t(my_2+3)$

因为 $\triangle ABM$，$\triangle PQM$ 的面积分别为 S_1，S_2，且 $S_2=\dfrac{49}{15}S_1$，$\sin\angle PMQ=\sin\angle AMB$

所以 $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\frac{1}{2}|MP|\cdot|MQ|\sin\angle PMQ}{\frac{1}{2}|MA|\cdot|MB|\sin\angle AMB}=\dfrac{|MP|\cdot|MQ|}{|MA|\cdot|MB|}=\dfrac{|y_1-t|\cdot|y_2-t|}{|t-0|\cdot|t-0|}=\dfrac{\left|\frac{t}{3}(my_1+3)\right|\cdot|-t(my_2+3)|}{t^2}$

$$=\frac{\left|m^2y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9\right|}{3}=\frac{\left|m^2\frac{n^2-4}{m^2-4}+3m\frac{-2mn}{m^2-4}+9\right|}{3}=\frac{\left|-3m^2-36\right|}{3\left|m^2-4\right|}=\frac{\left|m^2+12\right|}{\left|m^2-4\right|},$$

…………………………………………………………………………………………9 分

由 $S_2=\frac{49}{15}S_1$，得 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{49}{15}$，即 $\frac{\left|m^2+12\right|}{\left|m^2-4\right|}=\frac{49}{15}$，

因为直线 PQ 恒过点 $(4,0)$，点 $M(1,t)$ （$\frac{3}{4}<t<\frac{3}{2}$），

所以 $y_1y_2=\frac{n^2-4}{m^2-4}=\frac{4^2-4}{m^2-4}=\frac{12}{m^2-4}<0$，得 $m^2-4<0$，

由 $\frac{\left|m^2+12\right|}{\left|m^2-4\right|}=\frac{49}{15}$，得 $\frac{m^2+12}{m^2-4}=-\frac{49}{15}$，解得 $m^2=\frac{1}{4}$，……………………………10 分

又因为 $\frac{3}{4}<t<\frac{3}{2}$，所以 $y_1=y_P>\frac{4}{3}$，故 $m>-\frac{1}{2}$，所以 $m=\frac{1}{2}$ ……………………………11 分

所以直线 PQ 的方程为 $x=\frac{1}{2}y+4$ 即 $2x-y-8=0$．……………………………………12 分