2023拔尖强基联合定时检测

数 学 试 题

（满分：150分；考试时间：120分钟）

2022年11月

注意事项：

1. 答卷前考生务必把自己的姓名，准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑；回答非选择题时，用0.5毫米黑色墨迹签字笔将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回（试题卷自己保管好，以备评讲）。

一、单选题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知全集 $U=\{x|x+2>0\}$，集合 $A=\{x|x-1>0\}$，则 $\complement_U A=$（　　）

A．$(-\infty,1)$　　B．$(-\infty,1]$　　C．$(-2,1)$　　D．$(-2,1]$

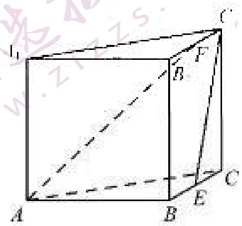
2．已知 $a\in R$，$z=\dfrac{a+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$（i为虚数单位）是纯虚数，则 $a=$（　　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

3．如图，在直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=CC_1$，$AB\perp BC$，E 为 BC 的中点，F 为 B_1C_1 的中点，则异面直线 AF 与 C_1E 所成角的余弦值为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt5}{2}$　　B．$\dfrac{2\sqrt5}{5}$

C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt5}{3}$



4．数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 叫做调和数列，此数列的前 n 项和已经被研究了几百年，但是迄今为止仍然没有得到它的求和公式，只是得到了它的近似公式：当 n 很大时，$1+\dfrac12+\dfrac13+\cdots+\dfrac1n\approx\ln n+\gamma$，其中 γ 称为欧拉－马歇罗尼常数，$\gamma\approx0.577\ 215\ 664\ 901\cdots$，至今为止都不确定 γ 是有理数还是无理数．设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．用上式计算 $\left[1+\dfrac12+\dfrac13+\cdots+\dfrac{1}{3456}\right]$ 的值为（　　）（参考数据：$\ln2\approx0.69$，$\ln3\approx1.10$，$\ln10\approx2.30$）

A．7　　B．8　　C．9　　D．10

5. 已知$\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{2}{5}$，则$\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)$的值等于（　　）

A. $-\frac{17}{25}$　　B. $\frac{17}{25}$　　C. $-\frac{7}{25}$　　D. $\frac{7}{25}$

6. 已知 M 是$\triangle ABC$内的一点，且$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\sqrt{3}$，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，$S_{\triangle MBC}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$，则$\frac{1}{S_{\triangle MAB}}+\frac{1}{S_{\triangle MAC}}$的最小值是（　　）

A. 8　　B. 4　　C. 2　　D. 1

7. 已知函数$f(x)=x^3+4x$，若过点$A(-1,a)$能作三条直线与$f(x)$的图像相切，则实数a的取值范围是（　　）

A. $(-4,5)$　　B. $[-5,+\infty)$　　C. $(-\infty,-4)$　　D. $(-5,-4)$

8. 在平面直角坐标系xoy中，已知曲线M的方程为$\frac{|x-2|}{2}+\frac{|y-3|}{3}=1$，则曲线$M$围成的图形面积为（　　）

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

二、多选题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求的，全部选对得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 下列函数中，既是奇函数，又满足对任意的x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，当$x_1>x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$的是（　　）

A. $f(x)=x^{\frac{3}{5}}$　　B. $f(x)=\tan x$　　C. $f(x)=x^3-\frac{1}{x}$　　D. $f(x)=\frac{4^x-1}{2^x}$

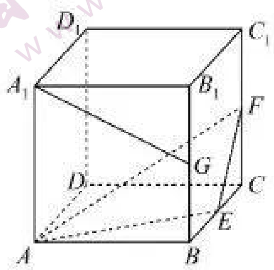
10. 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为4，E，F，G分别为BC，CC_1，BB_1的中点，则（　　）

A. 直线EF，A_1G是异面直线

B. 点A_1与点G到平面AEF的距离相等

C. 三棱锥B_1-AEF的体积等于24

D. 平面AEF截正方体所得的截面面积为18



11. 已知函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$g(x)=\frac{3x+1}{3x^2}$，则下列结论正确的有（　　）

A. $f(x)$有1个零点

B. $f(3)<f(2)<f(e)$

C. $h(x)=g(f(x))-6$有3个零点 来源微信公众号：高三答案

D. 设实数$a>0$，若$x^3f(x)\ge ae^{\frac{a}{x}}$对任意的$x\in[e,+\infty)$恒成立，则$a$的最大值为$e$

12．我们把一组焦点相同的双曲线称为“同焦双曲线”．已知双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$ 与双曲线 $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$ 为“同焦双曲线”，双曲线 E 的左右焦点分别为 F_1、F_2，过点 F_2 的直线与双曲线 E 的右支交于 P、Q 两点，PF_1 与 y 轴相交于点 A，$\triangle PAF_2$ 的内切圆与边 AF_2 相切于点 B．若 $|AB|=2$，则下列说法正确的有（　　）

A．双曲线 E 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$

B．若直线 $y=kx+2$ 与双曲线 E 有且仅有 1 个交点，则 $k=\pm2$

C．线段 PQ 的最小值为 12

D．记 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆面积为 S_1，$\triangle QF_1F_2$ 的内切圆面积为 S_2，则 $S_1+S_2\in\left[8\pi,\dfrac{40\pi}{3}\right)$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $3a_1$，$2a_2$，a_3 成等差数列，则公比 $q=$________．

14．在平行四边形 $ABCD$ 中，E 是 CD 的中点，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FD}$，且 $|\overrightarrow{AB}|=8$，$|\overrightarrow{AD}|=6$，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=-20$，则 $\cos\angle BAD=$________．

15．函数 $f(x)=2\cos(\pi x)-e^{|x-2|}$ 的所有零点之和为________．

16．已知 $m>0$，$n>0$ 且满足 $m+2n=mn$，若 $m+n-\sqrt{m^2+n^2}-2kmn\le 0$ 恒成立，则实数 k 的取值范围为________．

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

17．(10 分) 已知函数 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$，其中 $\vec{a}=(\cos x,\ \sin 2x)$，$\vec{b}=(2\cos x,\ \sqrt{3})$，$x\in R$．

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的单调递减区间；

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$f(A)=2$，$a=\sqrt{7}$，且 $3\sin B=2\sin C$，求 $\triangle ABC$ 的面积．

18．(12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，前 n 项和为 S_n，且 $S_n=\dfrac{a_n(a_n+1)}{2}$（$n\in\mathbf{N}^*$）．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n=\dfrac{2n+1}{S_n^2}$，$T_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$，求 T_n．

19. (12 分) 已知圆 $C:(x-a)^2+(y-2a+1)^2=4(a\in R)$，定点 $M(-1,2)$.

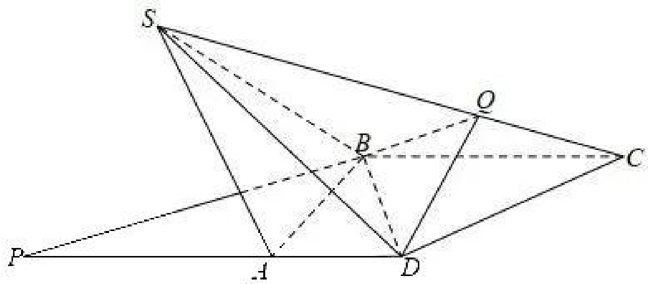
(1) 过点 M 作圆 C 的切线，切点是 A，若线段 MA 长为 $\sqrt{21}$，求圆 C 的标准方程；

(2) 过点 M 且斜率为1的直线 l，若圆 C 上有且仅有 4 个点到 l 的距离为1，求 a 的取值范围.

20. (12 分) 如图，在四边形 $PDCB$ 中，$PD // BC$，$BA\perp PD$ 于点 A，$PA=AB=BC=2$，$AD=1$．沿 BA 将 $\triangle PAB$ 翻折到 $\triangle SAB$ 的位置，使得二面角 $S-AB-P$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

(1) 证明：平面 $SBA\perp$ 平面 SAD；来源微信公众号：高三答案

(2) 在线段 SC 上（不含端点）是否存在点 Q，使得二面角 $Q-BD-C$ 的余弦值为 $\frac{4\sqrt{31}}{31}$，若存在，确定点 Q 的位置，若不存在，请说明理由.



21. (12 分) 在平面直角坐标系 xoy 中，动点 E 与两点 $A(-3,0)$，$B(3,0)$ 连线斜率分别为 k_1，k_2，且满足 $k_1k_2=-\frac{4}{9}$，记动点 E 的轨迹为曲线 Γ.

(1) 求曲线 Γ 的标准方程；

(2) 已知点 M 为曲线 Γ 在第一象限内的点，且 $C(0,-2)$，若 MA 交 y 轴于点 P，MC 交 x 轴于点 Q，试问：四边形 $APQC$ 的面积是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由.

22. (12 分) 已知函数 $f(x)=(x-2)e^{x-2}-2\ln x$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值；

(2) 若 $(x-2)e^{x-2}-f(x)=\frac{2m}{x^2}$ 有两个相异的实根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，证明：$\frac{1}{x_1^2}+\frac{2}{x_2^2}>-\frac{4}{3m}$.

高2023届三校拔尖强基联合考试评分细则与典型错误

2022年11月

1－5 $DADBB$　6－8 CDD　9. AC　10. ABD　11. ACD　12. ACD

13. 1或3　14. $\frac{3}{8}$　15. 4　16. $\left[\frac{1}{10},+\infty\right)$

题目 16. 解析：

(法一) 由题，有 $\frac{2}{m}+\frac{1}{n}=1$，令 $\frac{1}{m}=x$，$\therefore \frac{1}{n}=1-2x, x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$

$\therefore 1-x-2k\leqslant\sqrt{5x^2-4x+1}$，令 $\therefore f(x)=\sqrt{5x^2-4x+1}, x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

$\therefore f'(x)=\frac{5x-2}{\sqrt{5x^2-4x+1}}$，利用切线性质 $\therefore f'(x)=\frac{5x-2}{\sqrt{5x^2-4x+1}}=-1$，解得 $x_1=\frac{1}{2}$(舍)，

$x_2=\frac{3}{10}$，当 $x=\frac{3}{10}$ 时，$\therefore f\left(\frac{3}{10}\right)=\frac{1}{2}$，即 $2k\geqslant 1-\frac{3}{10}-\frac{1}{2}$，$\therefore k\geqslant\frac{1}{10}$.

(法二) 由题，有 $\frac{1}{k}\leqslant\frac{2mn}{m+n-\sqrt{m^2-n^2}}=m+n+\sqrt{m^2+n^2}$，

$\because \frac{2}{m}+\frac{1}{n}=1$，$\therefore (m-2)(n-1)=2$，令 $\frac{n-1}{2}=\frac{1}{m-2}=\tan\theta, \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore m+n+\sqrt{m^2+n^2}=2\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}+\frac{1}{\sin\theta}+\frac{2}{\cos\theta}+3=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{2\sin\theta+2}{\cos\theta}+3=$

$\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\frac{2+2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}+3$，令 $\tan\frac{\theta}{2}=t, t\in(0,1)$，$\therefore$ 上式右边 $=\frac{1}{t}+\frac{2t+2}{1-t}+3=$

$\frac{2t^2+t+1}{t-t^2}+3=-2+\frac{3t+1}{t-t^2}+3=\frac{3t+1}{t-t^2}+1$，令 $y=\frac{3t+1}{t-t^2}, t\in(0,1)$，分离常数，由基本不等式可得：$y\geqslant 9$. $\therefore \frac{1}{k}\leqslant 9+1$，即 $k\geqslant\frac{1}{10}$.

题目 17. 解：

(1) $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cos^2x+\sqrt{3}\sin 2x=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，……2分

由题意有 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in Z)$，……1分

解得 $k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in Z)$，所以单减区间为 $\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi\right](k\in Z)$；……2分

(2) $f(A)=2\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)+1=2$，$\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，因为 $0<A<\pi$，

所以 $\frac{\pi}{6}<2A+\frac{\pi}{6}<\frac{13\pi}{6}$，则 $2A+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$，……2分

因为 $3\sin B=2\sin C$，所以 $3b=2c$　$c=\frac{3}{2}b$，又在 ΔABC 中，由余弦定理得

$a^2=7=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=\frac{7}{4}b^2$，所以 $c=3$，$b=2$，……2分

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ……1分

典型错误

(1) 特殊三角函数值，公式记不清；
(2) 求成了增区间；
(3) 计算错误。

题目 18. 解：(1) 当 $n=1$ 时，$S_1=\dfrac{a_1(a_1+1)}{2}$，所以 $a_1=1$. ……1分

当 $n\geqslant 2$ 时，由 $S_n=\dfrac{a_n(a_n+1)}{2}$，得 $2S_n=a_n^2+a_n$ ①

所以 $2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}$ ②

①−②得：$2a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}$， ……3分

所以 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$，

因为 $a_n+a_{n-1}>0$，所以 $a_n-a_{n-1}=1$， ……5分

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为1，公差为1的等差数列，所以 $a_n=n$； ……6分

(2) 由 $S_n=\dfrac{a_n(a_n+1)}{2}$，$a_n=n$ 得 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. ……8分

所以 $b_n=\dfrac{2n+1}{S_n^2}=\dfrac{4(2n+1)}{n^2(n+1)^2}=4\left[\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]$， ……10分

所以 $T_n=4\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)+4\left(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+4\left[\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]$

$=4\left[1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]=\dfrac{4(n^2+2n)}{(n+1)^2}$. ……12分

典型错误

(1) 得到 $2a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}$ 这个式子之后不会变形化简；

(2) 第二问计算出 b_n 之后，不会裂项.

题目 19. 解：(1) 由题可知，圆心 $C(a,2a-1)$. ……1分

由勾股定理有 $MC^2=(a+1)^2+(2a-3)^2=\sqrt{21}^2+2^2=25$. ……2分

即 $5a^2-10a-15=0$，解得：$a=3$ 或 $a=-1$

所以圆的标准方程为：$(x-3)^2+(y-5)^2=4$ 或 $(x+1)^2+(y+3)^2=4$ ……6分

(2) l 的方程为：$x-y+3=0$. ……8分

由题，只需圆心 C 到直线 l 的距离小于1即可，所以 $d=\dfrac{|a-2a+4|}{\sqrt{2}}<1$， ……10分

所以 $|a-4|<\sqrt{2}$，解得 $4-\sqrt{2}<a<4+\sqrt{2}$. ……12分

典型错误

(1) 第一小题两个解无缘无故舍去一个解；

(2) 第一小题去设切线方程，把简单问题复杂化；

(3) 第二问没分析出问题的本质是线圆关系，再转化成点点距；

(4) 计算错误，许多同学计算问题导致扣分严重。

题目 20.

(1) $BA\perp PD, BA\perp AD, BA\perp SA$. ……2分

又因为 $AD\cap SA=A$，所以 $BA\perp$ 平面 SAD，因为 $BA\subset$ 平面 SBA，

所以平面 $SBA\perp$ 平面 SAD. ……2分

(2) 如图所示，以点 A 为坐标原点，AD，AB 所在直线分别为 x 轴、y 轴，与

的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系. ……

则 $A(0,0,0)$，$D(1,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(2,2,0)$，则 $\overrightarrow{BD}=(1,-2,0)$.

过 S 作 $SE\perp AP$，因为 $BA\perp$ 平面 SAD，所以 $BA\perp SE$，因为 $AP\cap BA=A$，
所以 $SE\perp$ 平面 $ABCD$，因为 $SA\perp AB,PA\perp AB$，所以二面角 $S-AB-P$ 的平面角为 $\angle SAP$，所以 $S(-1,0,\sqrt{3})$. ……2 分

设 $\overrightarrow{CQ}=\lambda\overrightarrow{CS}=(-3\lambda,-2\lambda,\sqrt{3}\lambda)\ (0<\lambda<1)$，则 $\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CQ}=(1-3\lambda,2-2\lambda,\sqrt{3}\lambda)$.

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 QBD 的一个法向量，则 $\begin{cases}(1-3\lambda)x+(2-2\lambda)y+\sqrt{3}\lambda z=0\\ x-2y=0\end{cases}$，

取 $\vec{n}=(2\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}\lambda,8\lambda-4)$. ……2 分

$\vec{m}=(0,0,1)$ 是平面 CBD 的一个法向量. ……1 分

由 $\left|\cos<\vec{n},\vec{m}>\right|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{|8\lambda-4|}{\sqrt{15\lambda^2+(8\lambda-4)^2}}=\dfrac{4\sqrt{31}}{31}$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 或 $\lambda=1$(舍).

所以 Q 为 SC 上靠近 C 点的三等分点，即 $\overrightarrow{CQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CS}$. ……2 分

典型错误

1. 线面垂直，面面垂直的判定不清；
2. 建系不好增加了运算难度；
3. [illegible]点的向量坐标；
4. [illegible]不会解

题目[illegible] 解：(1) 设 $E(x,y)$，由题，有：$k_1=\dfrac{y}{x+3}$，$k_2=\dfrac{y}{x-3}$.

所以 $k_1k_2=\dfrac{y^2}{x^2-9}=-\dfrac{4}{9}$，……2 分

即 $4x^2+9y^2=36(y\neq0)$，化简得 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1(y\neq0)$. ……4 分

(2) 设 $M(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，满足 $4x_0^2+9y_0^2=36$

MA 方程为：$y=\dfrac{y_0}{x_0+3}(x+3)$，令 $x=0$，则 $y_p=\dfrac{3y_0}{x_0+3}$，所以 $|CP|=\dfrac{3y_0}{x_0+3}+2$ ……6 分

MC 方程为：$y+2=\dfrac{y_0+2}{x_0}x$，令 $y=0$，则 $x_Q=\dfrac{2x_0}{y_0+2}$，所以 $|AQ|=\dfrac{2x_0}{y_0+2}+3$ ……8 分

所以 $S_{APQC}=\dfrac{1}{2}|CP|\cdot|AQ|=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3y_0}{x_0+3}+2\right)\left(\dfrac{2x_0}{y_0+2}+3\right)$ ……10 分

$=\dfrac{(2x_0+3y_0+6)^2}{2(x_0+3)(y_0+2)}=\dfrac{4x_0^2+4x_0(3y_0+6)+(3y_0+6)^2}{2(x_0+3)(y_0+2)}=\dfrac{(3y_0+6)(12+4x_0)}{2(x_0+3)(y_0+2)}=\dfrac{12(3+x_0)}{2(x_0+3)}$

$=6$

所以，四边形面积为定值 6. ……12 分

典型错误

第 1 问：(1) 斜率公式应该是 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，很多同学写反，(2) 没有标注范围.

第 2 问：(1) 其它解法：用点斜式设直线方程，联立解 M 坐标，
(2) 面积计算部分不会化简.

题目 22. 解：(1) 因为 $f'(x)=(x-1)e^{x-2}-\frac{2}{x}$， ……1分

所以 $f''(x)=xe^{x-2}+\frac{2}{x^2}$，因为 $x>0$，所以 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，又因为 $f'(2)=0$，所以当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增， ……3分

所以当 $x=2$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $f(2)=-2\ln 2$，$f(x)$ 无极大值. ……4分

(2) 因为 $2\ln x=\frac{2m}{x^2}$ 有两个相异实根，即 $m=x^2\ln x$ 有两个相异实根，令 $g(x)=x^2\ln x$，则

$g'(x)=x(2\ln x+1)$，当 $g'(x)>0$ 时，$x>\frac{1}{\sqrt{e}}$，当 $g'(x)<0$ 时，$0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 单调递减，$\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$ 单调递增，因为 $g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$，当 $x\to+\infty$，

$g(x)\to+\infty$，$x\to0^+$，$g(x)\to0$，所以 $m\in\left(-\frac{1}{2e},0\right)$ ……6分

因为 $m=x^2\ln x$ 有两个相异实根 x_1,x_2，所以 $\begin{cases}x_1^2\ln x_1=m\\x_2^2\ln x_2=m\end{cases}$，令 $t=\frac{x_2}{x_1}$，则 $t>1$，

所以 $\frac{t^2\ln(tx_1)}{\ln x_1}=1$，所以 $\ln x_1=\frac{t^2\ln t}{1-t^2}$，$\ln x_2=\ln x_1+\ln t=\frac{\ln t}{1-t^2}$

又因为 $\frac{1}{x_1^2}=\frac{\ln x_1}{m}$，$\frac{1}{x_2^2}=\frac{\ln x_2}{m}$，要证 $\frac{1}{x_1^2}+\frac{2}{x_2^2}>-\frac{4}{3m}$，只需证 $\frac{\ln x_1}{m}+\frac{2\ln x_2}{m}>-\frac{4}{3m}$，

因为 $m<0$，所以只需证 $\ln x_1+2\ln x_2<-\frac{4}{3}$，即证 $\frac{t^2\ln t}{1-t^2}+\frac{2\ln t}{1-t^2}<-\frac{4}{3}$，

因为 $t>1$，所以只需证 $\ln t>\frac{4(t^2-1)}{3(t^2+2)}$，即证 $\ln t-\frac{4(t^2-1)}{3(t^2+2)}>0$. ……9分

令 $h(t)=\ln t-\frac{4(t^2-1)}{3(t^2+2)}$，$t>1$，则 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{8t}{(t^2+2)^2}=\frac{(t^2-2)^2}{t(t^2+2)^2}\geqslant0$，

所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$h(t)>h(1)=0$，即当 $t>1$ 时，$\ln t-\frac{4(t^2-1)}{3(t^2+2)}>0$ 成立. 所以 $\frac{1}{x_1^2}+\frac{2}{x_2^2}>-\frac{4}{3m}$. ……12分

典型错误

第(1)问：计算导函数 $f'(x)$ 不准确，导致后面找极值点出错；部分同学猜出导函数 $f'(x)$ 零点后直接下结论说极值，但未指明是极小值；有同学审题不认真以为是求单调区间。

第(2)问：部分同学求 m 范围出错；换元化简、变形消元的技巧未能掌握，化单变量不等式不顺利；含 $\ln t$ 的不等式，证明时没有分离 $\ln t$ 的思想，导致对应函数导函数的形式复杂，不便于研究单调性。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。