



正整数  $n$  的最大位为 ( )

A. 15

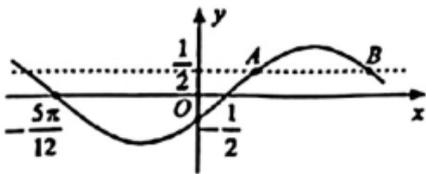
B. 16

C. 22

D. 23

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 6 分，部分选对得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图像如图所示，则 ( )



A.  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{3})$  上单调递增

B.  $f(x)$  在  $(0, 6)$  上有 4 个零点

C.  $|AB| = \frac{\pi}{3}$

D. 将  $y = \sin x$  的图像向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位，可得  $y = f(x)$  的图像

10. 若函数  $f(x)$  的定义域为  $R$ ，且  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ ， $f(2) = -1$ ，则 ( )

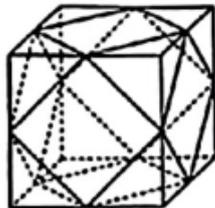
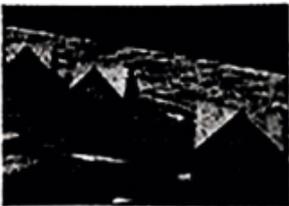
A.  $f(0) = 0$

B.  $f(x)$  为偶函数

C.  $f(x)$  的图像关于点  $(1, 0)$  对称

D.  $\sum_{i=1}^{\infty} f(i) = -1$

11. 某广场设置了一些石凳供大家休息，这些石凳是由棱长为 40cm 的正方体截去八个一样的四面体得到的，则 ( )



A. 该几何体的顶点数为 12

B. 该几何体的棱数为 24

C. 该几何体的表面积为  $(4800 + 800\sqrt{3}) \text{ cm}^2$

D. 该几何体外接球的表面积是原正方体内切球、外接球表面积的等差中项

第 II 卷 (非选择题 共 92 分)

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分。

12. 已知集合  $A = \{(x, y) | x - y = 1\}$ ,  $B = \{(x, y) | (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9\}$ , 则  $A \cap B$  的子集个数为\_\_\_\_\_;

13. 在工业生产中轴承的直径服从  $N(3.0, 0.0025)$ , 购买者要求直径为  $3.0 \pm \varepsilon$ , 不在这个范围的将被拒绝,

要使拒绝的概率控制在 4.55% 之内, 则  $\varepsilon$  至少为\_\_\_\_\_; (若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则

$$P(|X - \mu| < 2\sigma) = 0.9545)$$

14. 设双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ,  $A$  是右支上一点, 满足  $AF_1 \perp AF_2$ , 直

线  $AF_2$  交双曲线于另一点  $B$ , 且  $|BF_1| - |AF_1| = 2a$ , 则双曲线离心率的一个值为\_\_\_\_\_.

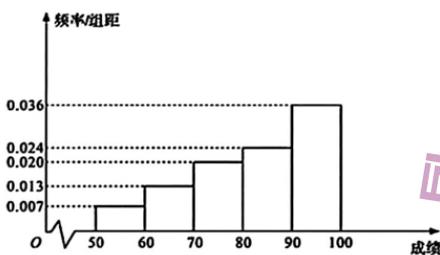
**四、解答题: 本大题共 5 小题, 共计 77 分. 解答应在答卷的相应各题中写出文字说明, 证明过程或演算步骤.**

15. (13 分) 设等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $a_2 + a_4 = 30$ ,  $S_4 = 45$ .

(I) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 设  $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ , 求  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

16. (15 分) 我们平时常用的视力表叫做对数视力表, 视力呈现为 4.8, 4.9, 5.0, 5.1. 视力  $\geq 5.0$  为正常视力. 否则就是近视. 某地区对学生视力与学习成结进行调查, 随机抽查了 100 名近视学生的成绩, 得到频率分布直方图:

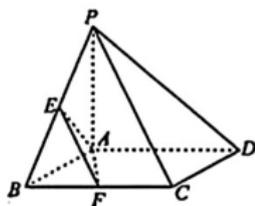


(I) 能否据此判断学生的学习成绩与视力状况相关? (不需说明理由)

(II) 估计该地区近视学生学习成绩的第 85 百分位数; (精确到 0.1)

(III) 已知该地区学生的近视率为 54%, 学生成绩的优秀率为 36% (成绩  $\geq 85$  分为优秀), 从该地区学生中任选一人, 若此人的成绩为优秀, 求此人近视的概率. (以样本中的频率作为相应的概率)

17. (15 分) 如图, 在四棱锥  $P - ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为正方形,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PA = AB$ , 点  $E, F$  分别是棱  $PB, BC$  的中点.



- (I) 求直线  $AF$  与平面  $PBC$  所成角的正弦值；  
 (II) 在截面  $AEF$  内是否存在点  $G$ ，使  $DG \perp$  平面  $AEF$ ，并说明理由。

18. (17分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，点  $P(0, 2)$  在椭圆  $C$  上，过点  $P$  的两条直线

$PA$ ， $PB$  分别与椭圆  $C$  交于另一点  $A$ ， $B$ ，且直线  $PA$ ， $PB$ ， $AB$  的斜率满足  $k_{PA} + k_{PB} = 4k_{AB} (k_{AB} \neq 0)$ 。

- (I) 求椭圆  $C$  的方程；  
 (II) 证明直线  $AB$  过定点；  
 (III) 椭圆  $C$  的焦点分别为  $F_1$ ， $F_2$ ，求凸四边形  $F_1AF_2B$  面积的取值范围。

19. (17分) 已知函数  $f(x) = \ln x + ax^2 - x + a + 1$ 。

- (I) 证明曲线  $y = f(x)$  在  $x = 1$  处的切线过原点；  
 (II) 讨论  $f(x)$  的单调性；  
 (III) 若  $f(x) \leq e^x$ ，求实数  $a$  的取值范围。