参考答案及解析

数学(一)

一、选择题

1. D 【解析】由题得 $M=\{x\mid -2x^2+x+3>0\}=\left\{x\,\middle|\,-1<x<\frac{3}{2}\right\}$，所以 $M\cup N=\left(-1,\frac{3}{2}\right)\cup(3,+\infty)$. 故选 D.

2. B 【解析】设 $z=a+bi$，$a,b\in\mathbf{R}$，则 $\bar{z}=a-bi$，所以 $z-2\bar{z}=-a+3bi=\frac{5i(2+i)}{5}=-1+2i$，则 $a=-\frac{1}{3}$，$b=-2$. 故选 B.

3. A 【解析】设 $D(a,b)$，因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，且 $AB/\!/CD$，所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，即 $(1,2)=(4-a,3-b)$，所以 $\begin{cases}4-a=1\\3-b=2\end{cases}$，解得 $a=3$，$b=1$. 所以 [illegible] $=(3,1)+2(2,1)=(7,3)$，所以 $|\overrightarrow{OD}+$ [illegible] $+3^2=$ [illegible]58. 故选 A.

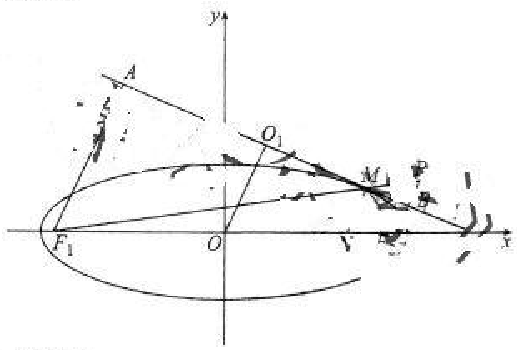
4. C 【解析】因为 $f(x)=\frac{1}{5^{2x^2-ax}}$ 在区间 [illegible] 上单调递增，所以函数 $y=5^{2x^2-ax}$ 在区间 $[2,6)$ 上单调递减，所以函数 $t=2x^2-ax$ 在区间 $[2,6)$ 上单调递减，所以 $\frac{a}{4}\geqslant 6$，解得 $a\geqslant 24$. 故选 C.

5. B 【解析】$\because \sin\alpha(1-2\sin^2\beta)=2\cos\alpha\cos\beta\sin\beta$，$\therefore \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\cos\beta\sin\beta}{1-2\sin^2\beta}$，$\therefore \tan\alpha=\frac{2\cos\beta\sin\beta}{1-2\sin^2\beta}=\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta}=\tan 2\beta$. 又 α,β 为锐角，$\therefore \alpha=2\beta$，$\therefore 2\beta-\alpha=0$. 故选 B.

6. D 【解析】由题得圆 C 的圆心为 $C(-2,0)$，半径 $r=2$，$\angle MAC=90^\circ$，则线段 MC 为 $\triangle MAC$ 外接圆的直径，所以当 $|MC|$ 最小时，$\triangle MAC$ 外接圆的面积最小. 当 $|MC|$ 最小时，$MC\perp l$，此时 $|MC|=\frac{|-2+0-2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$. 故选 D.

7. D 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $B-A=20d=80$，所以 $d=4$. 因为 $B+1\,480=2A$，所以 $2A=A+80+1\,480$，则 $A=1\,560$. 因为等差数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是以 a_1 为首项，$2d$ 为公差的等差数列，且数列 $\{a_n\}$ 的前 40 项中奇数项有 20 项，所以 $A=20a_1+\frac{20\times19}{2}\times8=1\,560$，解得 $a_1=2$，所以 $S_n=2n+\frac{n(n-1)}{2}\times4=2n^2$. 则 $b_n=\left[\frac{S_n+6}{2n^2}\right]=\left[1+\frac{3}{n^2}\right]$，所以 $b_1=[1+3]=4$，$b_2=\left[1+\frac{3}{4}\right]=1$，$b_3=\left[1+\frac{1}{3}\right]=1$，则当 $n\geqslant2$ 时，$\frac{3}{n^2}<1$，所以 $b_n=1$，故 $T_{100}=4+99\times1=103$. 故选 D.

8. C 【解析】过点 M 作 $MN\perp$ 切线 l，交 F_1F_2 于点 N，分别过点 F_1,O,F_2 作切线 l 的垂线，垂足分别为点 A,O_1,B. 由光学性质可知 MN 平分 $\angle F_1MF_2$，所以 $\angle F_1MN=\angle F_2MN=\frac{1}{2}\angle F_1MF_2=60^\circ$. 又 $AF_1/\!/MN/\!/BF_2$，所以 $\angle AF_1M=\angle F_1MN=\angle F_2MN=\angle BF_2M=60^\circ$. 因为 O 为 F_1F_2 的中点，所以 $d=|OO_1|=\frac{1}{2}(|AF_1|+|BF_2|)=\frac{1}{2}(|MF_1|\cos60^\circ+|MF_2|\cos60^\circ)=\frac{1}{2}\times8\times\cos60^\circ=2$. 由光学性质可知，$P,M,F_1$ 三点共线，所以 $|PF_1|=|MF_1|-|MP|=|MF_1|+|MF_2|=8$，所以 $|PF_1|-d=10$. 故选 C.



二、选择题

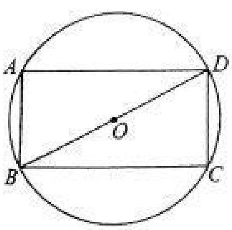
9. BD 【解析】将 6 名参赛学生的成绩按从小到大的顺序排列依次为 92，96，96，97，98，100，则中位数为 $\frac{96+97}{2}=96.5$，A 错误；众数为 96，B 正确；平均数为 $\frac{92+96+96+97+98+100}{6}=96.5>96$，C 错误；因为 $6\times0.75=4.5$，所以第 75 百分位数为第 5 个数 98，D 正确. 故选 BD.

10. CD 【解析】由 $N=N_0\cdot2^{-\frac{t}{12.43}}$，得 $\frac{N}{N_0}=2^{-\frac{t}{12.43}}$，则 $-\frac{t}{12.43}=\log_2\frac{N}{N_0}$，所以 $t=-12.43\log_2\frac{N}{N_0}$，A 错误；因为放射性元素氚的半衰期是 12.43 年，所以经过 24.86 年后，氚元素变为原来的 $2^{-\frac{24.86}{12.43}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，氚元素不会全部消失，B 错误；经过 62.15 年后，氚元素变为原来的 $2^{-\frac{62.15}{12.43}}=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$，C 正

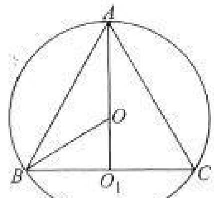
确;由题可知 $0.4N_0=N_0\cdot 2^{-\frac{x}{12.43}}$,所以 $\lg 2^{-\frac{x}{12.43}}=\lg 0.4$,即 $-\frac{x}{12.43}\lg 2=\lg 0.4$,所以 $\frac{x}{12.43}=\frac{1-2\lg 2}{\lg 2}\approx 1.32$,所以 $x\approx 1.32\times 12.43=16.4076$ 16,D 正确.故选 CD.

11. BC 【解析】令 $m(x)=x^2f(x)$,$x>0$,则 $m'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$,因为 $2f(x)+xf'(x)=\frac{e^{3x}}{x^2}$,所以 $m'(x)=\frac{e^{3x}}{x}$,由 $f(x)=\frac{m(x)}{x^2}$,得 $f'(x)=\frac{m'(x)\cdot x^2-2xm(x)}{x^4}=\frac{\frac{e^{3x}}{x}\cdot x^2-2xm(x)}{x^4}=\frac{e^{3x}-2m(x)}{x^3}$,令 $h(x)=e^{3x}-2m(x)$,$x>0$,则 $h'(x)=3e^{3x}-2m'(x)=3e^{3x}-\frac{2e^{3x}}{x}=e^{3x}\left(3-\frac{2}{x}\right)=e^{3x}\cdot\frac{3x-2}{x}$,当 $x\in\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减;当 $x\in\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增,所以 $h(x)\geqslant h\left(\frac{2}{3}\right)=e^2-2m\left(\frac{2}{3}\right)=e^2-\frac{8}{9}f\left(\frac{2}{3}\right)=e^2-\frac{8}{9}\times\frac{9e^2}{8}=0$,所以 $f'(x)\geqslant 0$,所以 $f(x)$ 单调递增,所以 A 错误,B 正确;由 $g(x)=x^2f(x)-e^6\ln x$,$x>0$,得 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-\frac{e^6}{x}=\frac{e^{3x}-e^6}{x}$,令 $g'(x)<0$,即 $e^{3x}-e^6<0$,得 $0<x<2$,所以 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0,2)$,所以 C 正确;令 $g'(x)>0$,即 $e^{3x}-e^6>0$,得 $x>2$,所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(2,+\infty)$,结合 C 可知 $g(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值,无极大值,所以 D 错误.故选 BC.

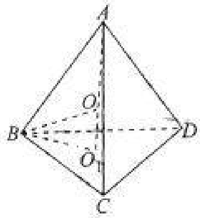
12. ACD 【解析】对于 A,设该球内接正方体的棱长为 a cm,则 $\sqrt{3a^2}=6\times 2$,解得 $a=4\sqrt{3}>6.5$,故切割出的工件形状可以是棱长为 6.5 cm 的正方体,A 正确;对于 B,作出该球及其内接圆柱的轴截面如图所示.



设球心为 O,当 $BC=10$ cm,$BD=12$ cm 时,$CD=\sqrt{BD^2-BC^2}=2\sqrt{11}$ cm<7 cm,故切割不出底面直径为 10 cm,高为 7 cm 的圆柱体,B 错误;对于 C,作出该球及其内接圆锥的轴截面如图所示.



设圆锥底面圆的圆心为 O_1,球心为 O,则点 O 在圆锥的高 AO_1 上,当 $BO_1=4$ cm 时,$OO_1=\sqrt{OB^2-BO_1^2}=\sqrt{36-16}=2\sqrt{5}$ cm,所以 $AO_1=AO+OO_1=(6+2\sqrt{5})$ cm>10 cm,故切割出的工件形状可以是底面直径为 8 cm,高为 10 cm 的圆锥,C 正确;对于 D,如图.



设该球的内接正三棱锥为 $A-BCD$,球心为 O,其中 $BC=4$ cm,$\triangle BCD$ 外接圆的圆心为 O_1,连接 AO_1,BO_1,BO,则球心 O 在线段 AO_1 上,$\triangle BCD$ 外接圆的半径 $r=O_1B=\frac{4}{\sin 60^\circ}\times\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm,则 $OO_1=\sqrt{BO^2-BO_1^2}=\frac{2\sqrt{69}}{3}$ cm,故 $AO_1=AO+OO_1=\left(6+\frac{2\sqrt{69}}{3}\right)$ cm>8 cm,故切割出的工件形状可以是底面棱长为 4 cm,高为 8 cm 的正三棱锥,D 正确.故选 ACD.

三、填空题

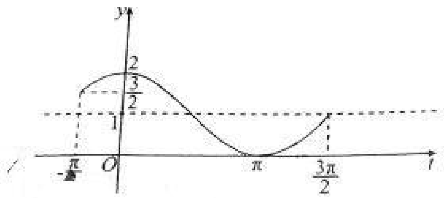
13. 64 【解析】从八座名山中选择两座或三座前去旅游,选中的名山中至少有一座来自"三山"的不同的选择方案有 $C_8^2-C_5^2+(C_8^3-C_5^3)=64$ 种.

14. $\sqrt{10}$ 【解析】设该圆台的高为 h,母线长为 l,则 $V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h=\frac{1}{3}\times(4\pi+\sqrt{4\pi\times 9\pi}+9\pi)h=\frac{19\pi}{3}h=19\pi$,所以 $h=3$,所以 $l=\sqrt{h^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$.

15. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 【解析】由题意得 $MF_1\perp MF_2$,$|OF_1|=|OF_2|=c$,由 $|AF_1|=\sqrt{10}|OA|$,得 $|OF_1|=3|OA|$,设 $|MF_2|=t$,因为 $|MF_1|-|MF_2|=2a$,所以 $|MF_1|=2a+t$,又 $\tan\angle AF_1O=\frac{|OA|}{|OF_1|}=\frac{|MF_2|}{|MF_1|}=\frac{1}{3}$,所以 $\frac{t}{2a+t}=\frac{1}{3}$,解得 $t=a$,则 $|MF_2|=a$,$|MF_1|=3a$,所以 ... $+a^2=$

$(2c)^2$，即 $10a^2=4c^2$，所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{10}{4}$，则 $e=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

16. $(2,3)\cup\left[\frac{7}{2},4\right)$ 【解析】由 $g(x)=0$，得 $[f(x)-1][f(x)-(m-2)]=0$，所以 $f(x)=1$ 或 $f(x)=m-2$，当 $x\in\left[0,\frac{11\pi}{12}\right]$ 时，$f(x)=1$ 对应的根是 $x_1=\frac{5\pi}{12}$，$x_2=\frac{11\pi}{12}$，要使得 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{11\pi}{12}\right]$ 上有 4 个零点，则方程 $f(x)=m-2$ 恰有 2 个不等实根，且 $m-2\neq1$，令 $t=2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right]$，$p(t)=\cos t+1$，$p(t)$ 的图象如图所示，



要使方程 $f(x)=m-2$ 恰有 2 个不等实根，则 $\frac{3}{2}\leqslant m-2<2$ 或 $0<m-2<1$，即 $\frac{7}{2}\leqslant m<4$ 或 $2<m<3$，所以 m 的取值范围是 $(2,3)\cup\left[\frac{7}{2},4\right)$.

四、解答题

17. 解：(1)因为 $c\sin A=\frac{4b\sin B}{1+\cos B}$，

所以 $c\sin A(1+\cos B)=4b\sin B$.

则由正弦定理得 $ac(1+\cos B)=4b^2$.　　(2 分)

则由余弦定理得 $2ac\left(1+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)=8b^2$.

化简得 $a^2+c^2+2ac=9b^2$.　　(4 分)

即 $(a+c)^2=9b^2$.

所以 $a+c=3b$.　　(5 分)

(2)由(1)可知 $a+c=3b$.

则 $b=\frac{a+c}{3}$.

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{4(a^2+c^2)-ac}{9ac}\geqslant\frac{8ac-ac}{9ac}=\frac{7}{9}$(当且仅当 $a=c$ 时取等号).　　(8 分)

所以 $0<B<\frac{\pi}{2}$.

所以 $\sin B\leqslant\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

所以 $\sin B$ 的最大值为 $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.　　(10 分)

18. 解：(1)因为 E 为 BC 的中点，

所以 $CE=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\frac{CE}{CD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $\frac{CD}{AD}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\frac{CE}{CD}=\frac{CD}{AD}$.

所以 $Rt\triangle ACD\backsim Rt\triangle DEC$.　　(2 分)

所以 $\angle DCA=\angle CED$.

所以 $\angle ACE+\angle CED=\angle ACE+\angle DCA=90^\circ$，

所以 $AC\perp DE$.　　(3 分)

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

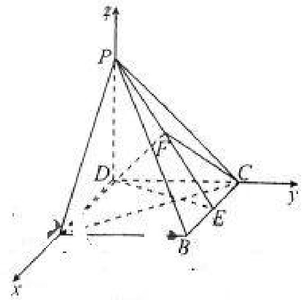
所以 $AC\perp PD$.

又 $PD\cap DE=D$，PD，$DE\subset$ 平面 PDE，

所以 $AC\perp$ 平面 PDE.　　(5 分)

(2)由题可知 DA，DC，DP 两两垂直.

所以以 D 为原点，DA，DC，DP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(\sqrt{2},0,0)$，$C(0,1,0)$，…，…1)，

$F\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{AP}=(-\sqrt{2},0,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{2},1,0)$，$\overrightarrow{AF}=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.　　(7 分)

设平面 ACF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-\sqrt{2}x+y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=-\frac{3\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$

取 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=\left(1,\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.　　(9 分)

设 AP 与平面 ACF 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AP}\rangle|=\frac{\left|-\sqrt{2}\times1+0\times\sqrt{2}+1\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{1+2+\frac{1}{2}}\times\sqrt{2+0+1}}=\frac{\sqrt{21}}{21}$.

所以 AP 与平面 ACF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{21}$. (12 分)

19. 解:(1) 因为 $f(x)=2\ln x-\frac{m}{x^2}-1\ (m\neq0)$, $x\in(0,+\infty)$,

所以 $f'(x)=\frac{2}{x}+\frac{2m}{x^3}=\frac{2(x^2+m)}{x^3}$. (1 分)

当 $m>0$ 时, $f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 此时 $f(x)$ 无极值; (2 分)

当 $m<0$ 时, 令 $f'(x)<0$, 得 $0<x<\sqrt{-m}$;

令 $f'(x)>0$, 得 $x>\sqrt{-m}$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{-m})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{-m},+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(\sqrt{-m})=\ln(-m)$, 无极大值. (4 分)

综上所述, 当 $m>0$ 时, $f(x)$ 无极值;

当 $m<0$ 时, $f(x)$ 的极小值为 $\ln(-m)$, 无极大值. (5 分)

(2) 由 (1) 可知, 当 $m<-1$ 时, $f(x)_{\min}=f(\sqrt{-m})=\ln(-m)$.

要证 $f(x)>\frac{2m+2}{m-1}$,

只需证 $\ln(-m)>\frac{2m+2}{m-1}=2+\frac{4}{m-1}$.

即证 $\ln(-m)+\frac{4}{1-m}-2>0$. (7 分)

令 $g(x)=\ln x+\frac{4}{1+x}-2$, $x>1$,

则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(1+x)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(1+x)^2}>0$.

所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)>g(1)=0$. (10 分)

所以当 $x>1$ 时, $\ln x+\frac{4}{1+x}-2>0$.

所以当 $m<-1$ 时, $\ln(-m)+\frac{4}{1-m}-2>0$,

所以 $f(x)>\frac{2m+2}{m-1}$ 得证. (12 分)

20. 解:(1) 由 $a_{n+1}=\frac{a_n}{3-4a_n}$, 得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}-4$,

即 $\frac{1}{a_{n+1}}-2=3\left(\frac{1}{a_n}-2\right)$. (2 分)

所以 $\frac{\frac{1}{a_{n+1}}-2}{\frac{1}{a_n}-2}=3$.

又 $\frac{1}{a_1}-2=3$,

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-2\right\}$ 是以 3 为首项, 3 为公比的等比数列. (4 分)

(2) 由 (1) 知 $\frac{1}{a_n}-2=3\times3^{n-1}=3^n$,

所以 $b_n=\frac{n^2a_n}{1-2a_n}=\frac{n^2}{\frac{1}{a_n}-2}=\frac{n^2}{3^n}$. (5 分)

所以 $S_n=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{3^2}{3^3}+\cdots+\frac{n^2}{3^n}$,

则 $\frac{1}{3}S_n=\frac{1^2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{3^n}+\frac{n^2}{3^{n+1}}$,

两式相减得 $\frac{2}{3}S_n=\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\cdots+\frac{2n-1}{3^n}-\frac{n^2}{3^{n+1}}$, (7 分)

令 $P_n=\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\cdots+\frac{2n-1}{3^n}$,

则 $\frac{1}{3}P_n=\frac{1}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{2n-3}{3^n}+\frac{2n-1}{3^{n+1}}$,

两式相减得 $\frac{2}{3}P_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{2}{3^n}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}$

$=\frac{1}{3}+\frac{\frac{2}{3^2}-\frac{2}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}-\frac{2n+2}{3^{n+1}}$.

所以 $P_n=1-\frac{n+1}{3^n}$. (10 分)

所以 $\frac{2}{3}S_n=1-\frac{n+1}{3^n}-\frac{n^2}{3^{n+1}}=1-\frac{n^2+3n+3}{3^{n+1}}$.

所以 $S_n=\frac{3}{2}-\frac{n^2+3n+3}{[illegible]}$. (12 分)

21. 解:(1)(ⅰ) 记事件 A 表示"从甲箱中取出一级榴莲", 事件 B 表示"从乙箱中取出一级榴莲",

则 $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(\overline{A})=\frac{1}{3}$, $P(B|A)=\frac{1}{2}$, $P(B|\overline{A})=\frac{1}{3}$,

所以 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$. (2 分)

(ⅱ) X 的可能取值为 0, 1, 2.

则 $P(X=0)=\frac{C_5^2}{C_{11}^2}=\frac{2}{11}$,

$P(X=1)=\frac{C_6^1C_5^1}{C_{11}^2}=\frac{6}{11}$,

$P(X=2)=\frac{C_6^2}{C_{11}^2}=\frac{3}{11}$,

所以 $E(X)=0\times\frac{2}{11}+1\times\frac{6}{11}+2\times\frac{3}{11}=\frac{12}{11}$. (5 分)

(2) 由题意可知每次单价增加 10 元的概率为 $\frac{7}{10}$, 每次单价增加 20 元的概率为 $\frac{3}{10}$.

设叫价为 $10n+40\ (1\leqslant n\leqslant11)$ 元的概率为 P_n,

易得 $P_1=\frac{7}{10}$, $P_2=\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}+\frac{3}{10}=\frac{79}{100}$. (7 分)

叫价出现$(10n+40)$元的情况只有以下两种：

①在叫价为$(10n+30)$元时，出现的数字不超过 6，其概率为$\frac{7}{10}P_{n-1}$；来源：高三答案公众号

②在叫价为$(10n+20)$元时，出现的数字超过 6，其概率为$\frac{3}{10}P_{n-2}$.

则 $P_n=\frac{7}{10}P_{n-1}+\frac{3}{10}P_{n-2}\ (n\geqslant 3)$.　　(9 分)

所以 $P_n-P_{n-1}=-\frac{3}{10}P_{n-1}+\frac{3}{10}P_{n-2}=-\frac{3}{10}(P_{n-1}-P_{n-2})\ (n\geqslant 3)$，$P_2-P_1=\frac{9}{100}\neq 0$.

所以当 $n\geqslant 2$ 时，数列$\{P_n-P_{n-1}\}$是首项为$\frac{9}{100}$，公比为$-\frac{3}{10}$的等比数列.

故 $P_n-P_{n-1}=\frac{9}{100}\times\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-2}$，$n\geqslant 2$.　　(10 分)

则 $P_{11}=P_1+(P_2-P_1)+(P_3-P_2)+\cdots+(P_{11}-P_{10})$

$=\ldots\frac{\frac{9}{100}\left[1-\left(-\frac{3}{10}\right)^{10}\right]}{\ldots}=\frac{10}{13}-\frac{9}{130}\times\left(\frac{3}{10}\right)^{10}$

≈ 0.77.

所以该游客能够买到优质榴莲的概率约为 0.77.　　(12 分)

22. 解：(1)由题意得 $G(-1,0)$，$F(1,0)$，$MH\parallel GF$，

又 FH 平分$\angle MFO$，

所以$\angle MFH=\angle HFO=\angle MHF$.

所以$|MF|=|MH|$.　　(2 分)

设 $M(x,y)$，则 $H(-1,y)$.

所以$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x+1|$.

整理得 $y^2=4x$.

所以动点 M 的轨迹曲线 C 的方程为 $y^2=4x$.(4 分)

(2)由题意可知直线 AB 的斜率不为 0.

因为 A,B,F 三点共线，

所以设直线 AB：$x=ty+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由直线 l_1：$x=\frac{1}{2}y+n$ 与直线 GA,GB,AB,x 轴分别交于点 D,E,P,Q.

可得 $n\neq 1$，且 $t\neq\frac{1}{2}$，$Q(n,0)$.

联立$\begin{cases}x=ty+1\\y^2=4x\end{cases}$，得 $y^2-4ty-4=0$，

则 $\Delta>0\Rightarrow t\in\mathbf{R}$，且 $t\neq\frac{1}{2}$.

$y_1y_2=-4$，$y_1+y_2=4t$.　　(6 分)

因为$|PQ|^2=|DQ|\cdot|EQ|$，

所以 $\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}}|y_P|\right)^2=\sqrt{1+\frac{1}{4}}|y_D|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}}|y_E|$.

即 $y_P^2=|y_D|\cdot|y_E|=|y_Dy_E|$.

直线 GA：$y=\frac{y_1}{x_1+1}(x+1)$.

联立$\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1+1}(x+1)\\x=\frac{y}{2}+n\end{cases}$，得 $y_D=\frac{2(n-1)y_1}{2x_1+2-y_1}$.

同理得 $y_E=\frac{2(n+1)y_2}{2x_2+2-y_2}$.　　(8 分)

联立$\begin{cases}x=ty+1\\x=\frac{y}{2}+n\end{cases}$，得 $y_P=\frac{2(n-1)}{2t-1}$.

所以$\left[\frac{2(n-1)}{2t-1}\right]^2=\left|\frac{2(n+1)y_1}{2x_1+2-y_1}\times\frac{2(n+1)y_2}{2x_2+2-y_2}\right|$.

整理得$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2=$

$(2t-1)^2\left|\frac{y_1y_2}{(2x_1+2-y_1)(2x_2+2-y_2)}\right|$

$=\frac{4(2t-1)^2}{\left|\left(\frac{y_1^2}{2}+2-y_1\right)\left(\frac{y_2^2}{2}+2-y_2\right)\right|}=$

$\frac{4(2t-1)^2}{\left|\frac{y_1^2y_2^2}{4}+(y_1+y_2)^2-y_1y_2-\frac{y_1+y_2}{2}\times y_1y_2-2(y_1+y_2)+4\right|}$

$=\frac{(2t-1)^2}{3+4t^2}$.

故$\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2=\frac{3+4t^2}{(2t-1)^2}$.　　(10 分)

令 $s=2t-1\neq 0$，则 $t=\frac{s+1}{2}$.

故$\frac{3+4t^2}{(2t-1)^2}=\frac{s^2+2s+4}{s^2}=1+\frac{2}{s}+\frac{4}{s^2}$

$=4\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$.

故$\begin{cases}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2\geqslant\frac{3}{4}\\n\neq 1\end{cases}$，即$\begin{cases}n^2+14n+1\geqslant 0\\n\neq 1\end{cases}$

解得 $n\leqslant -7-4\sqrt{3}$ 或 $-7+4\sqrt{3}\leqslant n<1$ 或 $n>1$.

故 n 的取值范围为$(-\infty,-7-4\sqrt{3}]\cup[-7+4\sqrt{3},1)\cup(1,+\infty)$.　　(12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。