准考证号________________ 姓名________

（在此试卷上答题无效）

漳州市 2024 届高三毕业班第二次质量检测

数学试题

本试题卷共 4 页，22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

考生注意：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，用 0.5 mm 黑色签字笔将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 A，B，若 $A=\{x\mid \log_4 x\leqslant 1\}$，且 $A\cap B=(0,3]$，则集合 B 可以为

A. $\{y\mid y=\sqrt{3-x}\}$　　B. $\{x\mid y=\sqrt{3-x}\}$　　C. $\{x\mid 2^x<8\}$　　D. $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x}{x-3}\leqslant 0\right\}$

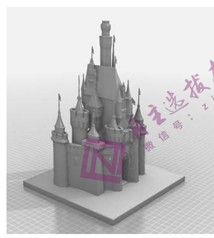
2. 若 $\exists\alpha\in[0,+\infty)$，$\cos\alpha<m$ 为真命题，则实数 m 的取值范围为

A. $m\geqslant 1$　　B. $m>1$　　C. $m\geqslant -1$　　D. $m>-1$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,m)$，向量 $\boldsymbol{b}=(n,-2)$，向量 $\boldsymbol{c}=(1,1)$，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，$\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$，则

A. $m=-1$　　B. $n=-2$　　C. $m+n=3$　　D. $m-n=1$

4. 公元 656 年，唐代李淳风注《九章》时提到祖暅的“开立圆术”. 祖暅在求球的体积时，使用一个原理：“幂势既同，则积不容异”. “幂”是截面积，“势”是立体的高，意思是两个同高的立体，如在等高处的截面积相等，则体积相等. 更详细点说就是，界于两个平行平面之间的两个立体，被任一平行于这两个平面的平面所截，如果两个截面的面积相等，则这两个立体的体积相等. 上述原理在中国被称为“祖暅原理”. 3D 打印技术发展至今，已经能够满足少量个性化的打印需求，现在用 3D 打印技术打印了一个“睡美人城堡”. 如图，其在高度为 h 的水平截面的面积 S 可以近似用函数 $S(h)=\pi(9-h)^2$，$h\in[0,9]$拟合，则该“睡美人城堡”的体积约为



A. 27π　　B. 81π　　C. 108π　　D. 243π

5. 甲、乙两名大学生利用假期时间参加社会实践活动，可以从 A，B，C，D 四个社区中随机选择一个社区，设事件 M 为“甲和乙至少一人选择了 A 社区”，事件 N 为“甲和乙选择的社区不相同”，则 $P(N|M)=$

A. $\dfrac{5}{6}$　　B. $\dfrac{6}{7}$　　C. $\dfrac{7}{8}$　　D. $\dfrac{5}{9}$

6. 若锐角 θ 满足$\sqrt{3}\cos2\theta-\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-\theta\right)=0$，则 $\cos\left(\dfrac{13\pi}{2}+2\theta\right)=$

A. $-\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $-\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

7. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，等比数列$\{b_n\}$的公比与$\{a_n\}$的公差均为 2，且满足 $b_1=a_1+1$，$b_3=a_4+1$，则使得 $b_6>S_n$ 成立的 n 的最大值为

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x-\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ -|x+1|+1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则函数 $g(x)=f(f(x)-1)$的零点个数为

A. 3　　B. 5　　C. 6　　D. 8

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知直线 l 经过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$的焦点，且与 C 交于 A，B 两点，以线段 AB 为直径的$\odot D$ 与 C 的准线相切于点 $P(-2,-1)$，则

A. 直线 l 的方程为 $4x+y-8=0$　　B. 点 D 的坐标为$\left(\dfrac{7}{4},-1\right)$

C. $\odot D$ 的周长为$\dfrac{17}{2}\pi$　　D. 直线 $4x+2y+9=0$ 与$\odot D$ 相切

10. 关于函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$的图象与性质，下列说法正确的是

A. $x=\dfrac{5\pi}{2}$是函数 $f(x)$图象的一条对称轴

B. $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$是函数 $f(x)$图象的一个对称中心

C. 将函数 $y=\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{2}$个单位长度可得到函数 $y=f(x)$的图象

D. 当 $x\in(0,2\pi)$时，$f(x)\in(-1,1)$

11. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=a_2=4$，且对 $\forall n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $4(S_n-S_{n-1})=S_{n+1}$，则

A. $\{S_n-2S_{n-1}\}$是等比数列　　B. $S_6=128$

C. $a_n=\begin{cases}4, & n=1,\\ 2^{n+1}-4, & n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$　　D. $a_n=\begin{cases}4, & n=1,\\ 2^n, & n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$

12. 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB$，E，F 分别为棱 AB，CC_1 的中点，过 D_1，E，F 三点作该正四棱柱的截面 α，则下列判断正确的是

A. 异面直线 EF 与直线 BB_1 所成角的正切值为$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

B. 截面 α 为六边形

C. 若 $AB=2$，截面 α 的周长为 $2\sqrt{2}+3\sqrt{13}$

D. 若 $AB=2$，截面 α 的面积为$\dfrac{11\sqrt{17}}{6}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{6-m}+\dfrac{y^2}{2m-3}=1$，$m\in\mathbf{Z}$，则 C 的离心率为________.（写出一个符合题目要求的即可）

14. 在二项式$\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^n$的展开式中，第三项为常数项，展开式中二项式系数和为a，所有项的系数和为b，则$a-b=$________.

15. 已知复数z_1，z_2满足$z_1+2\overline{z_1}=-3-\mathrm{i}$，$|z_2-z_1|=1$，则$|z_2+2\mathrm{i}|$的最大值为________.

16. 已知$f'(x)$是定义域为$\mathbf{R}$的函数$f(x)$的导函数，曲线$f(x-1)$关于$(1,0)$对称，且满足$f(x)-f(6-x)=3-x$，则$f(2\,022)+f(2\,028)=$________；$f'(-2\,025)=$________.

四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

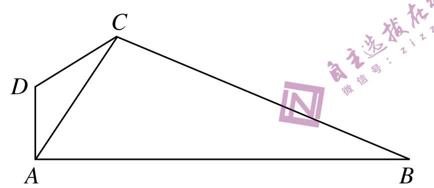
已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$a_{n+1}-\frac{S_n}{n}=n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，且$a_4$为$a_2$，$a_8$的等比中项.

(Ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)设T_n为数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和，证明：$T_n\geqslant\frac{1}{8}$.

18. (12分)

如图，在四边形$ABCD$中，$\angle DAB=\frac{\pi}{2}$，$B=\frac{\pi}{6}$，且$\triangle ABC$的外接圆半径为4.

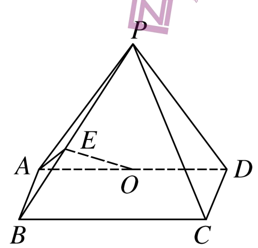


(Ⅰ)若$BC=4\sqrt{2}$，$AD=2\sqrt{2}$，求$\triangle ACD$的面积；

(Ⅱ)若$D=\frac{2\pi}{3}$，求$BC-AD$的最大值.

19. (12分)

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，侧面$PAD\perp$底面$ABCD$，侧棱PA和侧棱PD与底面$ABCD$所成的角均为60°，$AD=2AB=2$，O为AD中点，E为侧棱PB上一点，且$OE/\!/$平面PCD.



(Ⅰ)请确定点E的位置；

(Ⅱ)求平面AOE与平面PAB所成夹角的余弦值.

20. (12分)

2023年12月11日至12日中央经济工作会议在北京举行，会议再次强调要提振新能源汽车消费. 发展新能源汽车是我国从"汽车大国"迈向"汽车强国"的必由之路. 我国某地一座新能源汽车工厂对线下的成品车要经过多项检测，检测合格后方可销售，其中关键的两项测试分别为碰撞测试和续航测试，测试的结果只有三种等次：优秀、良好、合格，优秀可得5分、良好可得3分、合格可得1分，该型号新能源汽车在碰撞测试中结果为优秀的概率为$\frac{1}{2}$，良好的概率为$\frac{1}{3}$；在续航测试中结果为优秀的概率为$\frac{2}{5}$，良好的概率为$\frac{2}{5}$，两项测试相互独立，互不影响，该型号新能源汽车两项测试得分之和记为ξ.

(Ⅰ)求该型号新能源汽车参加两项测试仅有一次为合格的概率；

(Ⅱ)求离散型随机变量ξ的分布列与期望.

21. (12分)

已知函数$f(x)=x\mathrm{e}^x-\ln x-x+a$有两个不同的零点$x_1$，$x_2$.

(Ⅰ)求实数a的取值范围；

(Ⅱ)证明：$\ln x_1+\ln x_2+1<0$.

22. (12分)

已知$a>b>0$，我们称双曲线C：$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$与椭圆$\tau$：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$互为"伴随曲线"，点$A$为双曲线$C$和椭圆$\tau$的下顶点.

(Ⅰ)若B为椭圆τ的上顶点，直线$y=t(0<t<a)$与τ交于P，Q两点，证明：直线AP，BQ的交点在双曲线C上；

(Ⅱ)过椭圆τ的一个焦点且与长轴垂直的弦长为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，双曲线C的一条渐近线方程为$y=\sqrt{3}x$，若F为双曲线C的上焦点，直线l经过F且与双曲线C上支交于M，N两点，记$\triangle MON$的面积为S，$\angle MON=\theta$(O为坐标原点)，$\triangle AMN$的面积为$3\sqrt{3}+6$.

(ⅰ)求双曲线C的方程；

(ⅱ)证明：$2S\cos\theta=17\sin\theta$.