郑州外国语学校 2023-2024 学年高三年级适应性测试
数学学科参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1	2	3	4	5	6	7	8
B	C	B	C	D	D	D	A

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对得部分分，有错选得 0 分.

9	10	11
ABD	BD	ABC

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. -3　　13. -2　　14. $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ 或 $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.（1）$f'(x)=3x^2+2ax+b$，

$\because$ 函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x=-1$ 和 $x=3$ 处取得极值.

$\therefore f'(3)=27+6a+b=0$，$f'(-1)=3-2a+b=0$，

联立解得：$a=-3$，$b=-9$.

$\therefore f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=3$ 和 $x=-1$，

$x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；$x\in(-1,3)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；$x\in(3,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增.

故 $x=-1$ 和 $x=3$ 是 $f(x)$ 的极值点，

故函数 $f(x)$ 单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$；函数 $f(x)$ 单调递减区间为 $(-1,3)$.

（2）由（1）知 $f(x)=x^3-3x^2-9x+c$ 在 $(1,3)$ 单调递减，在 $(3,5)$ 单调递增，

要使得对任意 $x\in[1,5]$，不等式 $f(x)<c^2$ 恒成立，则需 $f(1)<c^2$ 且 $f(5)<c^2$，

故 $f(1)=-11+c<c^2$ 且 $f(5)=5+c<c^2$，

解得 $c>\frac{1+\sqrt{21}}{2}$，或 $c<\frac{1-\sqrt{21}}{2}$，

$\therefore c$ 的取值范围是 $(-\infty,\frac{1-\sqrt{21}}{2})\cup(\frac{1+\sqrt{21}}{2},+\infty)$.

16.（1）由题意 $\mu=1000,\sigma=50,K=25$，则 $\frac{\sigma}{K}=\frac{50^2}{25}=100$，

所以 Y：$N(1000,10^2)$，于是随机变量 Y 的期望为 $\mu'=1000$，标准差为 $\sigma'=10$，

因 $P(980\le Y\le 1020)=0.9545$，

故 $P(Y<980)=\frac{1-P(980\le Y\le 1020)}{2}=\frac{1-0.9545}{2}=0.02275$.

（2）设取出黄色面包个数为随机变量 ξ，则 ξ 的可能取值为 0，1，2.

则 $P(\xi=0)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{53}{140}$，

$P(\xi=1)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times2+\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times2=\frac{449}{840}$,

$P(\xi=2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{73}{840}$.

故随机变量ξ的分布列为:

ξ	0	1	2
p	$\frac{53}{140}$	$\frac{449}{840}$	$\frac{73}{840}$

所以数学期望为:$E(\xi)=\frac{53}{140}\times0+\frac{449}{840}\times1+\frac{73}{840}\times2=\frac{17}{24}$.

17.(1)连接AM,OM,MN,PN,

因为M,N依次是底面AB上的两个三等分点,

所以四边形$OMNB$是菱形,设$MB\cap ON=Q$,则Q为ON中点,且$ON\perp MB$,

又因为$OP=ON,\angle PON=60^\circ$,故□$OPN$是等边三角形,

连接PQ,则$ON\perp PQ$,

又因为$MB,PQ\subset$面PMB,$MB\cap PQ=Q$,所以$ON\perp$面PMB,

因为$PB\subset$面PMB,所以$ON\perp PB$,

因为M,N依次是底面AB上的两个三等分点,所以$ON//AM$,所以$AM\perp PB$,

又因为AB是半球O的直径,P是半球面上一点,所以$PB\perp PA$,

因为$AM,PA\subset$面PAM,$AM\cap PA=A$,所以$PB\perp$面PAM,

又因为$PM\subset$面PAM,所以$PB\perp PM$

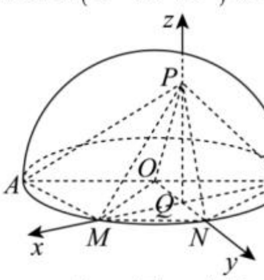
(2)因为点P在底面圆上的射影为ON中点,

所以$PQ\perp$面AMB,

因为$QM,QN\subset$面AMB,所以$PQ\perp QM,PQ\perp QN$,

又因为$QM\perp QN$,

所以以$\{\overrightarrow{QM},\overrightarrow{QN},\overrightarrow{QP}\}$为正交基底建立如图所示的空间直角坐标系,



所以$P(0,0,\sqrt{3}),M(\sqrt{3},0,0),B(-\sqrt{3},0,0),A(\sqrt{3},-2,0)$,

所以$\overrightarrow{PM}=(\sqrt{3},0,-\sqrt{3}),\overrightarrow{PA}=(\sqrt{3},-2,-\sqrt{3}),\overrightarrow{BA}=(2\sqrt{3},-2,0)$,

设平面PAB的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}=\sqrt{3}x-2y-\sqrt{3}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}=2\sqrt{3}x-2y=0\end{cases}$,令$x=1$,则$\vec{n}=(1,\sqrt{3},-1)$,

设直线PM与平面PAB所成角为$\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$,

则$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{PM},\vec{n}\rangle\right|=\frac{|\overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{PM}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

所以直线PM与平面PAB所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$

18.（1）第一步：根据点P在双曲线上得a，b的关系式

由题意设双曲线C的方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

由点$P(2,2)$在C上，得$\frac{4}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$．①

第二步：根据直线的斜率公式得a，b的关系式

设C的上、下焦点分别为$F_1(0,c)$，$F_2(0,-c)$，则$\frac{2-c}{2}\cdot\frac{2+c}{2}=-\frac{1}{2}$，解得$c^2=6$，

所以$a^2+b^2=6$．②

第三步：联立方程解得a^2，b^2的值

由①②得$a^2=2$，$b^2=4$，

第四步：得双曲线C的标准方程

故双曲线C的标准方程为$\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{4}=1$．

（2）第一步：设直线方程，联立方程得根与系数的关系由题意可知，直线EF的斜率不为0，

设直线EF的方程为$x=m(y-1)(m\neq 2)$，$E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，

联立，得方程组$\begin{cases}x=m(y-1)\\ \frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{4}=1\end{cases}$，

整理得$(m^2-2)y^2-2m^2y+m^2+4=0$

所以$m^2\neq 4$，$\Delta=(-2m^2)^2-4(m^2-2)(m^2+4)>0$，解得$m^2<4$，

所以$y_1+y_2=\frac{2m^2}{m^2-2}$，$y_1y_2=\frac{m^2+4}{m^2-2}$，

则$3(y_1+y_2)-2y_1y_2=4$．

第二步：用y_1，y_2表示点D的坐标

当直线PE的斜率不存在时，易得$E(2,-2)$，$F\left(-\frac{2}{7},\frac{10}{7}\right)$，$D\left(2,\frac{10}{7}\right)$，$B\left(\frac{6}{7},\frac{10}{7}\right)$，此时直线$AB$的斜率为$\frac{1}{2}$．当直线$PE$的斜率存在时，直线$PE$的方程为$y=\frac{y_1-2}{x_1-2}(x-2)+2$，所以点$D$的坐标为$\left(\frac{(y_2-2)(x_1-2)}{y_1-2}+2,y_2\right)$，

由$x_1=m(y_1-1)$，可得

$$\frac{(y_2-2)(x_1-2)}{y_1-2}+2=\frac{(y_2-2)\left[m(y_1-1)-2\right]}{y_1-2}+2=\frac{m(y_1-1)(y_2-2)+2(y_1-y_2)}{y_1-2},$$

第三步：用y_1，y_2表示点B的坐标

由$\overline{DF}=2\overline{BF}$，得点$B$为$DF$的中点，所以

$$x_B=\frac{1}{2}\left[\frac{m(y_1-1)(y_2-2)+2(y_1-y_2)}{y_1-2}+m(y_2-1)\right]=\frac{m\left[2y_1y_2-3(y_1+y_2)+4\right]+2(y_1-y_2)}{2(y_1-2)}=\frac{y_1-y_2}{y_1-2}$$

，

则$B\left(\frac{y_1-y_2}{y_1-2},y_2\right)$，

第四步：根据斜率的计算公式求直线 AB 的斜率.

所以 $k_{AB}=\dfrac{y_2-1}{\dfrac{y_1-y_2}{y_1-2}-0}=\dfrac{(y_2-1)(y_1-2)}{y_1-y_2}=\dfrac{y_1y_2-y_1-2y_2+2}{y_1-y_2}$

$=\dfrac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-2-y_1-2y_2+2}{y_1-y_2}=\dfrac{\frac{1}{2}(y_1-y_2)}{y_1-y_2}=\dfrac{1}{2}$.

故直线 AB 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$.

19.（1）当 $T=\{2,4\}$ 时，$S_T=a_2+a_4=a_2+9a_2=30$，因此 $a_2=3$，从而 $a_1=\dfrac{a_2}{3}=1$，$a_n=3^{n-1}$；

（2）$S_T\leqslant a_1+a_2+\cdots a_k=1+3+3^2+\cdots+3^{k-1}=\dfrac{3^k-1}{2}<3^k=a_{k+1}$；

（3）设 $A=\complement_C(C\cap D)$，$B=\complement_D(C\cap D)$，则 $A\cap B=$ ，$S_C=S_A+S_{C\cap D}$，$S_D=S_B+S_{C\cap D}$，$S_C+S_{C\cap D}-2S_D=S_A-2S_B$，因此原题就等价于证明 $S_A\geqslant 2S_B$. 由条件 $S_C\geqslant S_D$ 可知 $S_A\geqslant S_B$.

① 若 $B=\varnothing$，则 $S_B=0$，所以 $S_A\geqslant 2S_B$.

② 若 $B\neq\varnothing$，由 $S_A\geqslant S_B$ 可知 $A\neq\varnothing$，设 A 中最大元素为 l，B 中最大元素为 m，若 $m\geqslant l+1$，则由第（2）小题，$S_A<a_{l+1}\leqslant a_m\leqslant S_B$，矛盾. 因为 $A\cap B=\varnothing$，所以 $l\neq m$，所以 $l\geqslant m+1$，

$S_B\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_m=1+3+3^2+\cdots+3^{m-1}=\dfrac{3^m-1}{2}<\dfrac{a_{m+1}}{2}\leqslant\dfrac{a_l}{2}\leqslant\dfrac{S_A}{2}$，即 $S_A>2S_B$.

综上所述，$S_A\geqslant 2S_B$，因此 $S_C+S_{C\cap D}\geqslant 2S_D$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服

务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。