高三数学考试卷参考答案

1. D　$i^2+2i^3+3i^4=-1-2i+3=2-2i$,所以该复数对应的点为$(2,-2)$,该点在第四象限.

2. D　$A=[-7,3]$,因为$a,b\in\mathbf{N}$,所以$a+\sqrt{2}b\geqslant 0$,所以$A\cap B=\{0,1,\sqrt{2},1+\sqrt{2},2,2\sqrt{2},3\}$,所以集合$A\cap B$中元素的个数为7.

3. B　因为$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+4\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}-5\overrightarrow{CD}$,所以$x-y=1-(-5)=6$.

4. C　因为$\lg\tan\alpha=-1,2^{\tan\beta}=\sqrt{2}$,所以$\tan\alpha=\frac{1}{10},\tan\beta=\frac{1}{2}$,所以$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\frac{1}{10}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}}=\dfrac{2+10}{20-1}=\dfrac{12}{19}$.

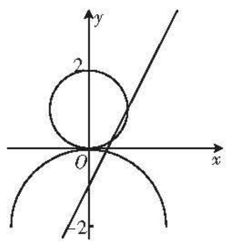
5. A　由$f(x)$为奇函数,得$f(-1)=-f(1)=2$,所以不等式$-2\leqslant f(1-x)\leqslant 2$等价于$f(1)\leqslant f(1-x)\leqslant f(-1)$.又$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减,所以$1\geqslant 1-x\geqslant -1$,即$0\leqslant x\leqslant 2$.

6. B　由题意可知,每一天收到的捐款成等差数列,首项为20,公差为15,设这次募捐活动一共进行了n天,则$20n+\frac{n(n-1)}{2}\times 15=5000$,得$n=25$.

7. B　由$5>\sqrt[4]{258}>\sqrt[4]{256}=4$,得$\sqrt[4]{258}$的整数部分为4,
则$\sqrt[4]{258}=x+4$,所以$(x+4)^4=258$,
即$C_4^0x^4+4C_4^1x^3+16C_4^2x^2+64C_4^3x+256C_4^4=x^4+16x^3+96x^2+256x+256=258$,
故$x^4+16x^3+96x^2+256x=2$.

8. D　设$AC=x(x>0)$,则$BC=PC=\sqrt{x^2+4}$,$PB=2\sqrt{2}$,所以$\triangle PBC$的面积为$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{x^2+2}=\sqrt{2x^2+4}$,所以四面体$PABC$内切球的半径$r(x)=$
$$\frac{3\times\frac{x}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2}{\frac{1}{2}\times 2\times 2+\frac{1}{2}\times 2x\times 2+\sqrt{2x^2+4}}=\frac{x}{1+x+\sqrt{\frac{1}{2}x^2+1}}=\frac{1}{\frac{1}{x}+1+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}}}(x>0),$$
则$r(x)$为增函数,因为$r(1)=\dfrac{1}{1+1+\sqrt{\frac{1}{2}+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{4-\sqrt{6}}{5}$,所以$r(x)\geqslant\dfrac{4-\sqrt{6}}{5}$的解集为$[1,+\infty)$.

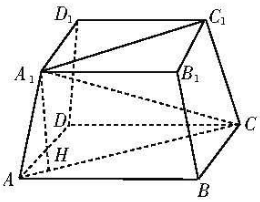
9. ABD　令$y=f(x)$,得$x^2+(y+2)^2=4(y\geqslant -2)$,则$f(x)$的图象为半圆,如图所示,由图可知,$f(x)$只有1个零点,A正确,C错误.直线$y=2x-1$与圆$x^2+(y+2)^2=4$的上半部分只有一个交点,B正确.曲线$y=f(x)$与圆$x^2+(y-1)^2=1$外切,D正确.



10. BCD　连接AC,A_1C,过A_1作$A_1H\perp AC$,垂足为H.因为$AB=3$,

$A_1B_1=2$,所以 $AC=3\sqrt{2}$,$A_1C_1=2\sqrt{2}$,所以 $AH=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$A_1H=\sqrt{AA_1^2-AH^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以该正四棱台的体积 $V=\frac{A_1H}{3}\times(AB^2+\sqrt{AB^2\cdot A_1B_1^2}+A_1B_1^2)=\frac{19\sqrt{6}}{6}$,A 错误. 直线 AA_1 与底面 $ABCD$ 所成的角为$\angle A_1AH$,由 $\cos\angle A_1AH=\frac{AH}{AA_1}=\frac{1}{2}$,得$\angle A_1AH=60°$,B 正确. $A_1C=\sqrt{CH^2+A_1H^2}=\sqrt{(3\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{6}}{2})^2}=\sqrt{14}$,C 正确.

设以 A_1 为球心,且表面积为 6π 的球的半径为 R,则 $4\pi R^2=6\pi$,解得 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}=A_1H$,所以以 A_1 为球心,且表面积为 6π 的球与底面 $ABCD$ 相切,D 正确.



11. BD　$f(x+\pi)=\sin 2(x+\pi)+\cos(x+\pi)=\sin 2x-\cos x\neq f(x)$,故 A 错误;$f(\pi-x)=\sin 2(\pi-x)+\cos(\pi-x)=-\sin 2x-\cos x=-f(x)$,故 B 正确;$f(2\pi-x)=\sin 2(2\pi-x)+\cos(2\pi-x)=-\sin 2x+\cos x\neq f(x)$,故 C 错误;$f'(x)=2\cos 2x-\sin x$,因为 $x\in(-\frac{\pi}{4},0)$,所以 $f'(x)=2\cos 2x-\sin x>0$,故 D 正确.

12. BD　不妨设 C 的一条渐近线的方程为 $y=\frac{b}{a}x$,则直线 AF 的斜率为 $-\frac{a}{b}$,则 $l_{AF}:y=-\frac{a}{b}(x-c)$. 设 $B(x_0,y_0)$,联立直线 AF 的方程与 $y=-\frac{b}{a}x$,可得 $x_0=\frac{a^2c}{a^2-b^2}$,$y_0=\frac{abc}{b^2-a^2}$. 同理可得点 A 的纵坐标为$\frac{ab}{c}$,因为$|\overrightarrow{FB}|=(\lambda+1)|\overrightarrow{FA}|$,所以$\frac{abc}{b^2-a^2}=\pm(\lambda+1)\frac{ab}{c}$. 因为 $e=\frac{c}{a}$,所以 $e=\sqrt{\frac{2\lambda+2}{\lambda+2}}$ 或 $e=\sqrt{\frac{2\lambda+2}{\lambda}}$.

13. 8　由 $5\times40\%=2$,将成绩从小到大排列,得第 40 百分位数是第二个成绩和第三个成绩的平均数,所以$\frac{m+8}{2}=8$,解得 $m=8$.

14. -8;$-\frac{1}{2}$　$f'(x)=16x^2+32x+\frac{1}{(x+1)^2}=16(x+1)^2+\frac{1}{(x+1)^2}-16\geqslant2\sqrt{16}-16=-8$,当且仅当 $16(x+1)^2=\frac{1}{(x+1)^2}$,即 $x=-\frac{1}{2}$时,等号成立,所以 l_m 的斜率的最小值为-8,此时 $m=-\frac{1}{2}$.

15. $(0,\frac{\sqrt{15}}{8}]$　因为$|PF_1|=15|PF_2|$,所以 $2a=|PF_1|+|PF_2|=16|PF_2|$,所以$|PF_2|=\frac{a}{8}$

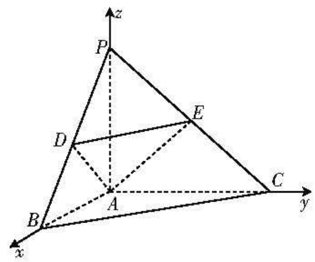
$\in[a-c,a+c]$,则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1-(\frac{2b}{2a})^2}\geqslant\frac{7}{8}$,则 $0<\frac{2b}{2a}\leqslant\frac{\sqrt{15}}{8}$.

16. $[-1,+\infty)$ 因为 $h(x)=x^2+(2-2m)x+m^2-m+1=(x-m+1)^2+m$,所以 $h(x)$ 图象的对称轴为直线 $x=m-1$,则 $h(x)$ 的最小值为 m. 不等式 $h(h(x))\geqslant0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立等价于 $\forall t\in[m,+\infty)$,$h(t)\geqslant0$. 因为 $h(t)$ 在 $[m,+\infty)$ 上单调递增,所以 $h(t)_{\min}=h(m)=m+1$,则 $m+1\geqslant0$,解得 $m\geqslant-1$,故 m 的取值范围是 $[-1,+\infty)$.

17. (1)证明:因为 D,E 分别为 PB,PC 的中点,所以 $BC/\!/DE$. ………………………… 2分

又 $DE\subset$ 平面 ADE,$BC\not\subset$ 平面 ADE,所以 $BC/\!/$ 平面 ADE. ………………………… 4分

(2)解:以 A 为原点,AB,AC,AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $AB=2$,则 $A(0,0,0)$,$D(1,0,1)$,$E(0,1,1)$, ………… 5分

得 $\overrightarrow{AD}=(1,0,1)$,$\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$. ………………………… 6分

设平面 ADE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=x+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=y+z=0,\end{cases}$ 取 $x=1$,则 $y=1$,$z=-1$,

即 $\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$. ………………………………………………………… 8分

由 $PA\perp$ 平面 ABC,得平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$, ………………………… 9分

所以平面 ABC 与平面 ADE 所成角的余弦值为 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……… 10分

18. 解:(1)由正弦定理以及 $(a-2c)\cos B=b(2\cos C-\cos A)$,可得 $(\sin A-2\sin C)\cos B=\sin B(2\cos C-\cos A)$, ………………………………………… 1分

则 $\sin A\cos B-2\sin C\cos B=2\sin B\cos C-\sin B\cos A$,

则 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin B\cos C+2\sin C\cos B$, ………………………… 2分

所以 $\sin(A+B)=2\sin(B+C)$,即 $\sin C=2\sin A$, ………………………………… 4分

所以 $c=2a$,即 $\frac{c}{a}=2$. ……………………………………………………… 6分

(2) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3a^2+9}{12a}=\frac{1}{4}(a+\frac{3}{a})\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$, ………………………… 7分

当且仅当 $a=\sqrt{3}$ 时,等号成立, ………………………………………………… 8分

所以 $A\in(0,\frac{\pi}{6}]$,则 A 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$,此时 $c=2\sqrt{3}$,所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

……………………………………………………………………… 12分

19. 解:(1)图1电路正常工作的概率为 $1-(1-p^2)(1-p)=p^2+p-p^3$, ………………… 2分

图2电路正常工作的概率为 $[1-(1-p)^2]p=2p^2-p^3$, ………………………………… 4分

因为 $0<p<1$,所以 $p>p^2$,所以 $p^2+p-p^3>2p^2-p^3$, ……………………………… 5分

所以图1电路的可靠性大于图2电路的可靠性. ………………………………………… 6分

(2)因为只有 3 个元件正常工作且该电路正常工作，所以这 3 个元件为 A,F,D 或 E,C,D，
…………………………………………………………………………………… 8 分

故所求概率为 $0.6\times0.6\times0.6\times(1-0.6)\times(1-0.8)\times(1-0.8)+0.6\times0.8\times0.6\times(1-0.6)\times(1-0.6)\times(1-0.8)=0.012672$. ………………………………………… 12 分

20. 解：(1)因为 $nS_{n+1}=(n+2)S_n$，所以 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{n+2}{n}$，

所以 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{3}{1},\frac{S_3}{S_2}=\frac{4}{2},\frac{S_4}{S_3}=\frac{5}{3},\cdots,\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}=\frac{n}{n-2},\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，

累乘得 $\frac{S_n}{S_1}=\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$，$n\geqslant2$，所以 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，$n\geqslant2$.

因为 $S_1=a_1=1$ 符合上式，所以 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$. …………………………………………… 2 分

当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=\frac{(n-1)^2+n-1}{2}=\frac{n^2-n}{2}$，所以 $S_n-S_{n-1}=\frac{n^2+n-n^2+n}{2}$，即 $a_n=n(n\geqslant2)$.

因为 $a_1=1$ 符合上式，所以 $a_n=n$. ……………………………………………………… 3 分

因为 $3b_{n+1}-b_n=2b_nb_{n+1}$，所以 $b_{n+1}=\frac{b_n}{3-2b_n}$，两边取倒数得 $\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{3-2b_n}{b_n}=\frac{3}{b_n}-2$，即 $\frac{1}{b_{n+1}}-1=3(\frac{1}{b_n}-1)$.

因为 $b_1=\frac{1}{a_3}=\frac{1}{3}$，所以数列 $\{\frac{1}{b_n}-1\}$ 是首项为 $\frac{1}{b_1}-1=2$，公比为 3 的等比数列，……… 5 分

所以 $\frac{1}{b_n}-1=2\times3^{n-1}$，故 $b_n=\frac{1}{2\times3^{n-1}+1}$. …………………………………………… 6 分

(2)由(1)知 $\frac{a_n}{b_n}=2n\times3^{n-1}+n$，所以 $T_n=(2\times3^0+4\times3^1+6\times3^2+\cdots+2n\times3^{n-1})+(1+2+3+\cdots+n)=(2\times3^0+4\times3^1+6\times3^2+\cdots+2n\times3^{n-1})+\frac{n(n+1)}{2}$. ……………………… 8 分

令 $Q_n=2\times3^0+4\times3^1+6\times3^2+\cdots+2n\times3^{n-1}$，则 $3Q_n=2\times3^1+4\times3^2+6\times3^3+\cdots+2n\times3^n$，

两式相减得 $-2Q_n=2\times3^0+2\times3^1+2\times3^2+\cdots+2\times3^{n-1}-2n\times3^n$，

$-Q_n=3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\times3^n=\frac{1-3^n}{1-3}-n\times3^n=\frac{3^n-1}{2}-n\times3^n$，

所以 $Q_n=(n-\frac{1}{2})\times3^n+\frac{1}{2}$，…………………………………………………………… 11 分

故 $T_n=(n-\frac{1}{2})\times3^n+\frac{1}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(2n-1)3^n+n^2+n+1}{2}$. ……………………… 12 分

21. 解：(1)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$.

由 $\begin{cases}y^2=2px,\\8x+y-46=0,\end{cases}$ 得 $y^2+\frac{py}{4}-\frac{23p}{2}=0$，…………………………………………… 1 分

则 $y_1+y_2=-\frac{p}{4}$，$x_1+x_2=\frac{p}{32}+\frac{23}{2}$. …………………………………………………… 2 分

因为点 F 是$\triangle ABC$ 的重心，所以$\begin{cases}\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}=0,\\ \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}=\dfrac{p}{2},\end{cases}$ ………………………… 3 分

则$\begin{cases}x_3=\dfrac{47p}{32}-\dfrac{23}{2},\\ y_3=\dfrac{p}{4},\end{cases}$ ………………………… 4 分

因为点 C 在 Ω 上，所以$(\dfrac{p}{4})^2=2p(\dfrac{47p}{32}-\dfrac{23}{2})$，又 $p>0$，所以 $p=8$. ………………………… 5 分

(2)当 $p=2$ 时，Ω 的方程为 $y^2=4x$，设 $A(\dfrac{y_1^2}{4},y_1)$，$B(\dfrac{y_2^2}{4},y_2)$，$C(\dfrac{y_3^2}{4},y_3)$.

$k_{AC}=\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\dfrac{y_3-y_1}{\frac{y_3^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}}=\dfrac{4}{y_1+y_3}$，同理得 $k_{BC}=\dfrac{4}{y_2+y_3}$，$k_{AB}=\dfrac{4}{y_1+y_2}$. ………………………… 6 分

直线 AB 的方程为 $y-y_1=\dfrac{4}{y_1+y_2}(x-x_1)$，化简得$(y_1+y_2)y-y_1y_2=4x$. ………………………… 7 分

因为直线 AB 经过点 $M(2,2)$，所以 $2(y_1+y_2)-y_1y_2=8$，易知 $y_1\neq 2$，则 $y_2=\dfrac{8-2y_1}{2-y_1}$. ①

因为 $k_{BC}=\dfrac{4}{y_2+y_3}=1$，所以 $y_2=4-y_3$. ②………………………… 8 分

联立①②可得$\dfrac{8-2y_1}{2-y_1}=4-y_3$，整理得 $y_1y_3=2(y_1+y_3)$. ………………………… 9 分

直线 AC 的方程为 $y-y_1=(x-x_1)\cdot\dfrac{4}{y_1+y_3}$，化简得$(y_1+y_3)y-y_1y_3=4x$.

将 $y_1y_3=2(y_1+y_3)$代入，得$(y-2)(y_1+y_3)=4x$.

令 $y=2$，得 $x=0$，可知直线 AC 过定点 $E(0,2)$. ………………………… 10 分

设线段 ME 的中点为 G，则 G 的坐标为$(1,2)$.

因为 D 在直线 AC 上，且 $MD\perp AC$，所以 D 在以 G 为圆心，EM 为直径的圆上运动，……
………………………… 11 分

因为$|ME|=2$，所以 D 的轨迹方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=1(x\neq 0$ 且 $x\neq 2)$. ……… 12 分

22.(1)解：令 $f(x)=|x\ln x|$，则 $f(x)=\begin{cases}-x\ln x,0<x<1,\\ x\ln x,x\geqslant 1,\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}-\ln x-1,0<x<1,\\ \ln x+1,x\geqslant 1,\end{cases}$ ………………………… 1 分

则当 $x\in(0,\dfrac{1}{e})\cup(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，当 $x\in(\dfrac{1}{e},1)$时，$f'(x)<0$，………………………… 3 分

所以 $f(x)$在$(0,\dfrac{1}{e})$和$(1,+\infty)$上单调递增，在$(\dfrac{1}{e},1)$上单调递减.

又$|x\ln x|>0$，所以 $0<a<f(\dfrac{1}{e})$，即 $0<a<\dfrac{1}{e}$，所以 a 的取值范围为$(0,\dfrac{1}{e})$. ……… 5 分

(2)证明:由(1)可知 $0<x_1<\frac{1}{\mathrm{e}}<x_2<1<x_3$,

下面证明 $x_1x_2<\frac{1}{\mathrm{e}^2}$,$x_3<\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

①证明 $x_1x_2<\frac{1}{\mathrm{e}^2}$.

令$\frac{x_2}{x_1}=t>1$,因为$-x_1\ln x_1=-x_2\ln x_2$,所以$\frac{x_1}{x_2}=\frac{\ln x_2}{\ln x_1}=\frac{1}{t}$.

由$\frac{\ln(tx_1)}{\ln x_1}=\frac{1}{t}$,得 $\ln x_1=\frac{t\ln t}{1-t}$,故 $\ln x_2=\frac{\ln t}{1-t}$,则 $x_1=\mathrm{e}^{\frac{t\ln t}{1-t}}$,$x_2=\mathrm{e}^{\frac{\ln t}{1-t}}$, …………………… 6 分

所以 $x_1x_2=\mathrm{e}^{\frac{\ln t}{1-t}+\frac{t\ln t}{1-t}}=\mathrm{e}^{\frac{(t+1)\ln t}{1-t}}$. …………………………………………………………………… 7 分

设 $s(t)=\ln t-2\times\frac{t-1}{t+1}$,$t>1$,则 $s'(t)=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$,

故 $s(t)$在$(1,+\infty)$上为增函数,故 $s(t)>s(1)=0$,即 $\ln t>2\times\frac{t-1}{t+1}$,$t>1$, …………… 9 分

故$\frac{(t+1)\ln t}{1-t}<-2$,则 $x_1x_2<\frac{1}{\mathrm{e}^2}$. ………………………………………………………… 10 分

②证明 $x_3<\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

由题可知 $f(x_3)<f(\frac{1}{\mathrm{e}})=\frac{1}{\mathrm{e}}$,$f(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}})-\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}}{3}-\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}-3}{3\mathrm{e}}>\frac{2.7\times(\frac{64}{27})^{\frac{1}{3}}-3}{3\mathrm{e}}>0$,

因为 $y=f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,$f(x_3)<f(\frac{1}{\mathrm{e}})=\frac{1}{\mathrm{e}}<f(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}})$,所以 $x_3<\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$成立.

综上,$x_1x_2x_3\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}$. …………………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。