十堰市2024年高三年级元月调研考试
数学参考答案

1. B　由 $x^2-8x+15<0$，解得 $3<x<5$，所以 $\complement_U A=(-\infty,3]\cup[5,+\infty)$，由 $\sqrt{x}>1$ 可知 $x>1$，则 $(\complement_U A)\cap B=(1,3]\cup[5,+\infty)$.

2. A　因为 $z=\frac{3+\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}=\frac{(3+\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}{(2-3\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}=\frac{3}{13}+\frac{11}{13}\mathrm{i}$，所以复数 z 在复平面内的点位于第一象限.

3. C　由题意知 $\begin{cases}\pi r^2=9\pi,\\ \frac{1}{3}\pi r^2h=12\pi,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r=3,\\ h=4,\end{cases}$ 则该圆锥的母线长为 $\sqrt{r^2+h^2}=5$.

4. D　令 $2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{8}\leqslant\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则 $-\frac{\pi}{16}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{16}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[-\frac{\pi}{16}+k\pi,\frac{7\pi}{16}+k\pi],k\in\mathbf{Z}$. 令 $k=0$，得函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的单调递减区间为 $[-\frac{\pi}{16},\frac{7\pi}{16}]$.

5. A　易知 C 的一个焦点到一条渐近线的距离为 b，则 $b=2\sqrt{2}a$，所以 C 的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+8}=3$.

6. D　因为角 α 的终边过点 $P(-1,7)$，所以 $\tan\alpha=-7$，$\tan 2\beta=\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{-7+1}{1+7}=-\frac{3}{4}$. 由 $\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=-\frac{3}{4}$，解得 $\tan\beta=-\frac{1}{3}$ 或 $\tan\beta=3$. 又因为 $\alpha+\frac{\pi}{4}$ 是第二象限角，所以 β 是第一或第三象限角，所以 $\tan\beta=3$.

7. C　设切点为 $(x_0,2+\ln x_0)$，因为 $(2+\ln x)'=\frac{1}{x}$，所以 $a=\frac{1}{x_0}$. 又因为切点 $(x_0,2+\ln x_0)$ 在直线 $y=ax+b$ 上，所以 $2+\ln x_0=ax_0+b=1+b$，解得 $b=1+\ln x_0$，所以 $a+b=1+\frac{1}{x_0}+\ln x_0$. 令 $g(x)=1+\frac{1}{x}+\ln x$，则 $g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$，易知 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(1)=2$，故 $a+b$ 的取值范围为 $[2,+\infty)$.

8. B　由题意知 $P(\Omega_1)=\frac{1}{5}$，$P(\Omega_2)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$，

$P(\Omega_3)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$，

$P(\Omega_4)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$，

因为 $P(\Omega_1\cap\Omega_4)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}\neq P(\Omega_1)\cdot P(\Omega_4)$，所以A错误，

因为 $P(\Omega_1\cap\Omega_3)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}=P(\Omega_1)\cdot P(\Omega_3)$，所以B正确，

因为 $P(\Omega_2\cap\Omega_4)=0\neq P(\Omega_2)\cdot P(\Omega_4)$，所以C错误，

因为 $P(\Omega_3\cap\Omega_4)=0\neq P(\Omega_3)\cdot P(\Omega_4)$，所以D错误.

9. BC　对于 A，甲组样本数据的平均数为$\frac{1}{6}\times(1+2+2+7+8+10)=5$，乙组样本数据的平均数为$\frac{1}{6}\times(3+3+5+6+9+10)=6$，A 错误.

对于 B，甲组样本数据的极差为 $10-1=9$. 乙组样本数据的极差为 $10-3=7$，B 正确.

对于 C，甲组样本数据的方差为$\frac{1}{6}\times[4^2+3^2+3^2+2^2+3^2+5^2]=12$，乙组样本数据的方差为$\frac{1}{6}\times[3^2+3^2+1^2+0+3^2+4^2]=\frac{22}{3}$，C 正确.

对于 D，$6\times75\%=4.5$，故甲组样本数据的第 75 百分位数为 8，乙组样本数据的第 75 百分位数为 9，D 错误.

10. BCD　因为$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$，所以 A 错误；因为$(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}=(1,2)\cdot(2,-1)=0$，所以 B 正确；因为$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{15}{5\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，所以 C 正确；$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量的坐标为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\times\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=3\boldsymbol{b}=(6,-3)$，则 D 正确.

11. BCD　对于 A，因为 $A(0,5)$，$B(-5,0)$，所以直线 AB 的方程为 $x-y+5=0$，圆心 $C(-3,4)$到直线 AB 的距离为$\frac{|-3-4+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$，又因为圆 C 的半径 $r=2\sqrt{2}$，所以直线 AB 截圆 C 所得的弦长为 $2\times\sqrt{8-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$，A 错误.

对于 B，易知$|AB|=5\sqrt{2}$，要想$\triangle PAB$ 的面积最大，只需点 P 到直线 AB 的距离最大，而点 P 到直线 AB 的距离的最大值为 $2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，所以$\triangle PAB$ 的面积的最大值为$\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times5\sqrt{2}=15$，B 正确.

对于 C，当点 P 在直线 AB 上方时，点 P 到直线 AB 的距离的范围是$(0,r+\sqrt{2})$，即$(0,3\sqrt{2})$，由对称性可知，此时满足到直线 AB 的距离为$\sqrt{2}$的 P 点位置有 2 个. 当点 P 在直线 AB 下方时，点 P 到直线 AB 的距离的范围是$(0,r-\sqrt{2}]$，即$(0,\sqrt{2}]$，此时满足到直线 AB 的距离为$\sqrt{2}$的 P 点位置只有 1 个. 综上所述，满足到直线 AB 的距离为$\sqrt{2}$的 P 点位置共有 3 个，C 正确.

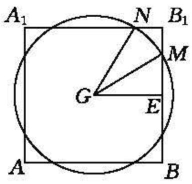
对于 D，由题意知$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{PC}^2+\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$. 又因为 $A(0,5)$，$B(-5,0)$，$C(-3,4)$，所以$\overrightarrow{CA}=(3,1)$，$\overrightarrow{CB}=(-2,-4)$，故$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=3\times(-2)+1\times(-4)=-10$，$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=(1,-3)$. 设点 $D(x_0,y_0)$满足$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}$，则$\overrightarrow{CD}=(x_0+3,y_0-4)$，故$\begin{cases}x_0+3=1,\\y_0-4=-3,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_0=-2,\\y_0=1,\end{cases}$即 $D(-2,1)$，$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{10}$. 所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}^2+\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=8+|\overrightarrow{PC}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CD}\rangle-10=-2+2\sqrt{2}\times\sqrt{10}\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CD}\rangle=-2+4\sqrt{5}\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CD}\rangle$. 又因为 $4\sqrt{5}\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CD}\rangle\in[-4\sqrt{5},4\sqrt{5}]$，所以$-2+4\sqrt{5}\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CD}\rangle\in[-2-4\sqrt{5},-2+4\sqrt{5}]$，即$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围为$[-2-4\sqrt{5},-2+4\sqrt{5}]$，D 正确.

12. ACD　对于 A，取 AB_1 的中点 G，连接 FG，DE(图略)，易知 G 也是 DE 的中点，在$\triangle AB_1F$ 中，因为 $FA=FB_1$，G 为 AB_1 的中点，所以 $FG\perp AB_1$，在$\triangle DEF$ 中，因为 $FD=FE$，G 为 DE

的中点，所以 $FG\perp DE$，又因为 AB_1，$DE\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $FG\perp$ 平面 ABB_1A_1. 又因为 $FG\subset$ 平面 AB_1F，所以平面 $AB_1F\perp$ 平面 ABB_1A_1，A 正确.

对于 B，设点 B_1 到平面 BCD 的距离为 h，易知 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{5-1}=2$，$S_{\triangle BB_1D}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$，因为 $V_{B_1-BCD}=V_{C-BB_1D}$，所以 $\frac{1}{3}\times 2h=\frac{1}{3}\times 2\times\sqrt{3}$，解得 $h=\sqrt{3}$，B 错误.

对于 C，取 BC 的中点 Q，连接 AQ（图略），易知 $AQ\perp BC$. 以 A 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向，建立空间直角坐标系，则 $D(0,0,1)$，$B_1(1,\sqrt{3},2)$，设 $P(-1,\sqrt{3},t)$，$0\leqslant t\leqslant 2$，$\overrightarrow{DB_1}=(1,\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{DP}=(-1,\sqrt{3},t-1)$，设 DB_1 与 DP 所成的角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{t+1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{t^2-2t+5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{1+\frac{4(t-1)}{(t-1)^2+4}}$. 令 $u=t-1(-1\leqslant u\leqslant 1)$，则 $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{1+\frac{4u}{u^2+4}}$，当 $u=0$ 即 $t=1$ 时，$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$；当 $0<u\leqslant 1$ 即 $1<t\leqslant 2$ 时，$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{1+\frac{4}{u+\frac{4}{u}}}$，可知 $\frac{\sqrt{5}}{5}<\cos\theta\leqslant\frac{3}{5}$；当 $-1\leqslant u<0$ 即 $0\leqslant t<1$ 时，可知 $\frac{1}{5}\leqslant\cos\theta<\frac{\sqrt{5}}{5}$. 综上，$DB_1$ 与 DP 所成角的余弦值的取值范围为 $[\frac{1}{5},\frac{3}{5}]$，C 正确.



对于 D，由 A 选项中的结论知 $FG\perp$ 平面 ABB_1A_1，$FG=\sqrt{3}$. 又因为球面的半径为 $\frac{\sqrt{39}}{3}$，所以以 F 为球心，$\frac{\sqrt{39}}{3}$ 为半径的球面与侧面 ABB_1A_1 的交线（圆的一部分）的半径为 $\sqrt{(\frac{\sqrt{39}}{3})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 如图，$GM=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$GE=1$，所以 $\cos\angle MGE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $\angle MGE=\frac{\pi}{6}$，由圆与正方形的对称性知 $\angle MGN=\frac{\pi}{6}$，所以球面与侧面 ABB_1A_1 的交线长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\pi}{6}\times 4=\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$，D 正确.

13. -17　因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-2)=-f(2)=-(2\times 2^3+1)=-17$.

14. 12　因为 $-\frac{p}{2}=-2$，所以 $p=4$，故抛物线的方程为 $y^2=8x$，焦点 $F(2,0)$，易知过焦点 F 且斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线的方程为 $y=\sqrt{2}(x-2)$，联立方程组 $\begin{cases}y^2=8x,\\ y=\sqrt{2}(x-2),\end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-8x+4=0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=8$，所以 $|AB|=x_1+x_2+p=8+4=12$.

15. 4　$f(x)=\frac{4-(1+\tan^2x)}{1+\tan^2x}+3(1+\tan^2x)^2-2(1+\tan^2x)$. 令 $t=1+\tan^2x\in[1,+\infty)$，则 $g(t)=\frac{4-t}{t}+3t^2-2t(t\geqslant 1)$，故 $g'(t)=-\frac{4}{t^2}+6t-2=\frac{2(3t^3-t^2-2)}{t^2}$. 令 $h(t)=3t^3-t^2-2(t\geqslant 1)$，则 $h'(t)=9t^2-2t>0$，所以 $h(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$h(t)\geqslant h(1)=0$，即 $g'(t)\geqslant 0$，所以 $g(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，则 $g(t)\geqslant g(1)=4$，当 $\tan x=0$ 时，$f(x)$ 取得最小值 4.

16. $(-\infty,-\frac{5}{8})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$　由题意可得 $a_{n+1}-a_n=(-\frac{1}{2})^n$，所以 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3$

$-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})^2+\cdots+(-\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^n]$，显然 $a_n>0$，由 $(t-a_n)(t+a_{n+3})>0$，解得 $t>a_n$ 或 $t<-a_{n+3}$.

由题意可知，$t>(a_n)_{\min}$ 或 $t<(-a_{n+3})_{\max}$.

当 n 为偶数时，$a_n=\frac{2}{3}[1-(\frac{1}{2})^n]\in[\frac{1}{2},\frac{2}{3})$，$-a_{n+3}=-\frac{2}{3}[1+(\frac{1}{2})^{n+3}]\in[-\frac{11}{16},-\frac{2}{3})$，所以 $t>\frac{1}{2}$ 或 $t<-\frac{2}{3}$；

当 n 为奇数时，$a_n=\frac{2}{3}[1+(\frac{1}{2})^n]\in(\frac{2}{3},1]$，$-a_{n+3}=-\frac{2}{3}[1-(\frac{1}{2})^{n+3}]\in(-\frac{2}{3},-\frac{5}{8}]$，所以 $t>\frac{2}{3}$ 或 $t<-\frac{5}{8}$.

综上，t 的取值范围为 $(-\infty,-\frac{5}{8})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$.

17.(1)解：由题意知 $a_3^2=a_1a_{13}$，即 $(a_1+2d)^2=a_1(a_1+12d)$，化简得 $d(d-2a_1)=0$.

因为 $d\neq0$，所以 $d=2a_1$. ………………………………………… 2分

又 $a_2=3$，所以 $a_1+d=3$. ………………………………………… 3分

联立方程组 $\begin{cases}d=2a_1,\\a_1+d=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}d=2,\\a_1=1,\end{cases}$ ………………………………… 4分

故 $a_n=2n-1$，$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=n^2$. ………………………………… 5分

(2)证明：由(1)知 $\sqrt{\frac{1}{S_nS_{n+1}}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，………………………… 7分

所以 $T_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$， ……………… 9分

又因为 $\frac{1}{n+1}>0$，所以 $1-\frac{1}{n+1}<1$，即 $T_n<1$. ……………………………… 10分

18.解：(1)100份样本数据的平均值为

$x=(35\times0.005+45\times0.010+55\times0.010+65\times0.020+75\times0.032+85\times0.023)\times10=68.3$. ………………………………………… 4分

(2)竞赛成绩不低于60分的频率为 $(0.020+0.032+0.023)\times10=0.75=\frac{3}{4}$， ……… 5分

低于60分的频率为 $(0.005+0.010+0.010)\times10=0.25=\frac{1}{4}$， ……………………… 6分

X 的所有可能取值为0，1，2，3，4，5，则 $X\sim B(5,\frac{3}{4})$， ………………………… 7分

$P(X=0)=C_5^0(\frac{1}{4})^5=\frac{1}{1024}$，

$P(X=1)=C_5^1\times\frac{3}{4}\times(\frac{1}{4})^4=\frac{15}{1024}$，

$P(X=2)=C_5^2(\frac{3}{4})^2\times(\frac{1}{4})^3=\frac{90}{1024}=\frac{45}{512}$，

$P(X=3)=C_5^3(\frac{3}{4})^3\times(\frac{1}{4})^2=\frac{270}{1024}=\frac{135}{512}$，

$P(X=4)=C_5^4(\frac{3}{4})^4\times\frac{1}{4}=\frac{405}{1024}$,

$P(X=5)=C_5^5(\frac{3}{4})^5=\frac{243}{1024}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{45}{512}$	$\frac{135}{512}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{243}{1024}$

………………………………………………………………………… 10 分

故 $E(X)=\frac{15}{4}$. ………………………………………………………… 12 分

19. 解:(1)由题可知 $\angle AED=\frac{5\pi}{6}$. ……………………………………………… 1 分

在 $\triangle AED$ 中,设 $DE=x$,由余弦定理得 $AD^2=AE^2+DE^2-2AE\cdot DE\cdot\cos\angle AED$, ……
………………………………………………………………………… 3 分

所以 $x^2+\sqrt{3}x-6=0$,解得 $x=\sqrt{3}$,即 $DE=\sqrt{3}$. …………………………………… 5 分

(2)在 $\triangle CED$ 中,由正弦定理得 $\frac{DE}{\sin\angle ECD}=\frac{CD}{\sin\angle CED}$, ……………………………… 7 分

解得 $\sin\angle ECD=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………… 8 分

因为 $\angle ECD=\angle BAC+\angle B>\angle BAC=\frac{\pi}{3}$, $\sin\angle ECD=\frac{\sqrt{3}}{3}<\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\angle ECD>\frac{2\pi}{3}$,即 $\angle ECD$ 为钝角, ……………………………………………… 9 分

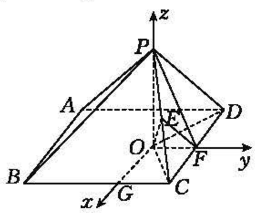
所以 $\cos\angle ECD=-\frac{\sqrt{6}}{3}$. ………………………………………………… 10 分

所以 $\cos\angle B=\cos(\angle ECD-\frac{\pi}{3})$

$=\cos\angle ECD\cos\frac{\pi}{3}+\sin\angle ECD\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3-\sqrt{6}}{6}$. ………………………………… 12 分

20. (1)证明:取 CD 的中点 F,连接 EF,PF,OF,因为 E 为 PC 的中点,所以 $EF/\!/PD$.

又 $EF\not\subset$ 平面 PAD, $PD\subset$ 平面 PAD,所以 $EF/\!/$ 平面 APD. ………
…………………………………………………… 1 分



因为 $OE/\!/$ 平面 PAD, $OE\cap EF=E$,所以平面 $OEF/\!/$ 平面 PAD.
…………………………………………………… 2 分

因为平面 $ABCD\cap$ 平面 $OEF=OF$,平面 $ABCD\cap$ 平面 $PAD=AD$,

所以 $OF/\!/AD$. ………………………………………… 3 分

因为 $AD\perp CD$,所以 $OF\perp CD$. …………………………………………………… 4 分

由 $PO\perp$ 平面 $ABCD$,可得 $PO\perp CD$. 又 $PO\cap OF=O$,所以 $CD\perp$ 平面 POF,从而 $PF\perp CD$.
………………………………………………………………………… 5 分

因为 PF 是 CD 的中垂线,所以 $PC=PD$. ………………………………………… 6 分

(2)解：因为 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，所以 PC 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle PCO=60°$，

又 $OC\perp OD$，$AB=CD=2$，所以 $PO=\sqrt{3}CO=\sqrt{6}$. ………… 7分

作 $OG\perp BC$，垂足为 G，分别以 $\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OP}$ 的方向为 x,y,z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $D(-1,1,0)$，$B(1,-3,0)$，$C(1,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{6})$，

$\overrightarrow{BC}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{PC}=(1,1,-\sqrt{6})$，$\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$. ………… 8分

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=4y_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=x_1+y_1-\sqrt{6}z_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=1$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{6},0,1)$. ………… 9分

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=2x_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=x_2+y_2-\sqrt{6}z_2=0,\end{cases}$ 令 $y_2=\sqrt{6}$，得 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{6},1)$. ………… 10分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{1}{7}$，即平面 PBC 与平面 PCD 夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{7}$. ………… 12分

21. 解：(1)因为椭圆 C 的长轴长是短轴长的 3 倍，所以 $a=3b$， ………… 1分

则椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{9b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. ………… 2分

又椭圆 C 经过点 $(1,\dfrac{2\sqrt{2}}{3})$，所以 $\dfrac{1}{9b^2}+\dfrac{8}{9b^2}=1$， ………… 3分

解得 $b=1$，$a=3$，所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$. ………… 4分

(2)设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，直线 PQ 的方程为 $x=my+n$，且 $n\neq3$，

联立方程组$\begin{cases}x=my+n,\\ \dfrac{x^2}{9}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 x 得 $(m^2+9)y^2+2mny+n^2-9=0$， ………… 5分

由 $\Delta>0$，得 $m^2-n^2+9>0$，所以 $y_1+y_2=\dfrac{-2mn}{m^2+9}$，$y_1y_2=\dfrac{n^2-9}{m^2+9}$. ………… 6分

又因为 $k_1k_2=\dfrac{1}{3}$，所以 $\dfrac{y_1}{x_1-3}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-3}=\dfrac{1}{3}$，整理得 $3y_1y_2=(x_1-3)(x_2-3)$，

即 $3y_1y_2=(my_1+n-3)(my_2+n-3)$，

化简得 $(m^2-3)y_1y_2+m(n-3)(y_1+y_2)+(n-3)^2=0$. ………… 8分

所以 $\dfrac{(m^2-3)(n^2-9)}{m^2+9}-\dfrac{2m^2n(n-3)}{m^2+9}+(n-3)^2=0$， ………… 9分

化简得 $6n-36=0$，解得 $n=6$，即直线 PQ 恒过点 $N(6,0)$. ………… 10分

因为 $AB\perp PQ$，所以点 B 在以线段 AN 为直径的圆上，取线段 AN 的中点为 $M(\dfrac{9}{2},0)$，则

$|MB|=\dfrac{1}{2}|AN|=\dfrac{3}{2}$，所以存在定点 $M(\dfrac{9}{2},0)$，使得线段 BM 的长度为定值. ………… 12分

22. (1)解：$f(x)=\dfrac{a}{x^2}+2\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， ………… 1分

且 $f'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2a}{x^3}=\dfrac{2x^2-2a}{x^3}$， ………… 2分

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，…………………………… 3 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $x>\sqrt{a}$，令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<\sqrt{a}$，

故 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增.

综上，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增. …………………………………………………………………… 5 分

(2) 证明：由(1)知，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)$ 至多有一个零点，不符合要求，故 $a>0$. …………………………………………………………………………………… 6 分

因为 $f(x)$ 有两个不相同的零点 x_1,x_2，所以 $f(\sqrt{a})=1+\ln a<0$，

解得 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$，$\frac{a}{x_1^2}+2\ln x_1=0$，$\frac{a}{x_2^2}+2\ln x_2=0$，故 $\frac{a}{x_1^2}+\frac{a}{x_2^2}=-2\ln(x_1x_2)$，………… 7 分

要证 $x_1f'(x_1)+x_2f'(x_2)>4\ln\frac{a}{2}+4$，

即证 $x_1\cdot\frac{2x_1^2-2a}{x_1^3}+x_2\cdot\frac{2x_2^2-2a}{x_2^3}=\frac{2x_1^2-2a}{x_1^2}+\frac{2x_2^2-2a}{x_2^2}=4+4\ln(x_1x_2)>4\ln\frac{a}{2}+4$，

即证 $x_1x_2>\frac{a}{2}$. …………………………………………………………………………………… 8 分

不妨设 $0<x_1<x_2$，$\frac{a}{x_1^2}+2\ln x_1=0$，$\frac{a}{x_2^2}+2\ln x_2=0$，

两式相减得 $\frac{a}{x_1^2}-\frac{a}{x_2^2}=2(\ln x_2-\ln x_1)$，

变形为 $\frac{x_2^2-x_1^2}{\ln x_2-\ln x_1}=\frac{2x_1^2x_2^2}{a}$，………………………………………………………… 9 分

下面证明 $\frac{x_2^2-x_1^2}{\ln x_2-\ln x_1}>x_1x_2$ 成立.

只需证 $\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1x_2}>\ln x_2-\ln x_1$，即 $\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_1}{x_2}>\ln\frac{x_2}{x_1}$. …………………………………… 10 分

令 $\frac{x_2}{x_1}=t>1$，即要证 $t-\frac{1}{t}>\ln t(t>1)$.

构造函数 $h(t)=t-\frac{1}{t}-\ln t(t>1)$，

则 $h'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}=\frac{t^2-t+1}{t^2}=\frac{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}{t^2}>0$ 恒成立，

所以 $h(t)=t-\frac{1}{t}-\ln t$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，…………………………………… 11 分

则 $h(t)>h(1)=0$，所以 $t-\frac{1}{t}>\ln t(t>1)$，

所以 $\frac{x_2^2-x_1^2}{\ln x_2-\ln x_1}>x_1x_2$，即 $\frac{2x_1^2x_2^2}{a}>x_1x_2$，所以 $x_1x_2>\frac{a}{2}$，故 $x_1f'(x_1)+x_2f'(x_2)>4\ln\frac{a}{2}+4$ 成立. ………………………………………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。