炎德·英才大联考长沙市一中2024届高三月考试卷(五)

数学参考答案

一、选择题(本大题共8个小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	C	D	A	D	A	B

1.B 【解析】因为2是方程$x^2-3x+t=0$的解,将$x=2$代入方程,得$t=2$,所以$x^2-3x+2=0$的解为$x=1$或$x=2$,所以$B=\{1,2\}$,$A\cup B=\{1,2,3,4\}$,故选B.

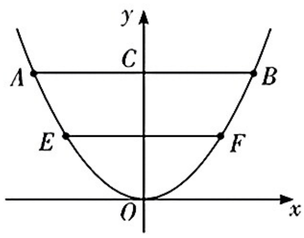
2.C 【解析】复数$z=3-\mathrm{i}+(1+a\mathrm{i})^2=4-a^2+(2a-1)\mathrm{i}$,$z$在复平面内对应的点在坐标轴上,则$4-a^2=0$或$2a-1=0$,解得$a=2$或$a=-2$或$a=\frac{1}{2}$,即$z=3\mathrm{i}$或$z=-5\mathrm{i}$或$z=\frac{15}{4}$.$z=3\mathrm{i}$时,$|z|=3$;$z=-5\mathrm{i}$时,$|z|=5$;$z=\frac{15}{4}$时,$|z|=\frac{15}{4}$.$|z|=4$不可能.故选C.

3.C 【解析】因为函数$f(x)=a^x-a(a>0$,且$a\neq1)$,当$a>1$时,$y=a^x$是增函数,并且恒过定点$(0,1)$,又因为$f(x)=a^x-a$的图象在$y=a^x$的基础上向下平移超过1个单位长度,故D错误,C正确;当$0<a<1$时,$y=a^x$是减函数,并且恒过定点$(0,1)$,又$f(x)=a^x-a$的图象在$y=a^x$的基础上向下平移了不到1个单位长度,故A,B错误,故选C.

4.D 【解析】对于A,若$m\perp\alpha,n\perp\beta,m\perp n$,则$\alpha\perp\beta$,故A正确;对于B,若$m\perp\alpha,n\perp\beta,\alpha/\!/\beta$,则$m/\!/n$,故B正确;对于C,若$\alpha/\!/\beta,\beta/\!/\gamma$,则$\alpha/\!/\gamma$,故C正确;对于D,若$m/\!/\alpha,n/\!/\beta,m/\!/n$,则$\alpha,\beta$平行或相交,故D错误,故选D.

5.A 【解析】充分性:$a_{n+1}-a_n=n+1+\frac{\lambda}{n+1}-\left(n+\frac{\lambda}{n}\right)=1-\frac{\lambda}{n(n+1)}=\frac{n^2+n-\lambda}{n(n+1)}$.因为$f(n)=n^2+n-\lambda$的对称轴为直线$n=-\frac{1}{2}$,所以$f(n)$在$[1,+\infty)$单调递增,所以$f(n)$的最小值为$f(1)=2-\lambda$.因为$0<\lambda<2$,所以$f(n)\geqslant f(1)=2-\lambda>0$,所以$a_{n+1}-a_n>0$,即数列$\{a_n\}$是递增数列,所以"$0<\lambda<2$"是"数列$\{a_n\}$是递增数列"的充分条件.必要性:显然,当$\lambda=0$时,$a_n=n$为递增数列,所以"$0<\lambda<2$"是"数列$\{a_n\}$是递增数列"的不必要条件.综上,"$0<\lambda<2$"是"数列$\{a_n\}$是递增数列"的充分不必要条件,故选A.

6.D 【解析】以O为原点,OC为y轴,建立如图所示的平面直角坐标系,设抛物线的标准方程为$x^2=2py(p>0)$,由题意可得$B(1,1.5)$,代入$x^2=2py$得$1=3p$,得$p=\frac{1}{3}$,故抛物线的标准方程为$x^2=\frac{2}{3}y$,设$F(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$,则$y_0=1.5-0.5=1$,则



$x_0^2=\frac{2}{3}\times1=\frac{2}{3}$,$x_0=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\approx0.816$,所以截面图中水面宽$EF$的长度约为$0.816\times2\approx1.63\ \mathrm{m}$,故选D.

7.A 【解析】由题得$f(x)=a\sin\omega x+b\cos\omega x=A\sin(\omega x+\varphi)$,其中$\tan\varphi=\frac{b}{a}>0$,$\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

由题意知,$\omega\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi=k_1\pi$,又因为$f'(x)=A\omega\cos(\omega x+\varphi)$,所以$\omega\cdot\frac{\pi}{3}+\varphi=k_2\pi$,两式相减得$\omega\cdot\frac{\pi}{2}=(k_2-k_1)\pi$,$\therefore\omega_{\min}=2$,此时$\varphi=\frac{\pi}{3}$.所以$\tan\varphi=\frac{b}{a}=\sqrt{3}$,故选A.

8.B 【解析】取$x=\frac{128}{125}$,可得$\frac{3}{125}\cdot\frac{122}{125}<7\ln2-3\ln5<\frac{3}{125}\cdot\frac{128}{125}$,计算可得$1.6087<\ln5<1.6093$,故选B.

二、选择题(本大题共 4 个小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项是符合题目要求,全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 2 分)

题　号	9	10	11	12
答　案	ACD	BC	BCD	AC

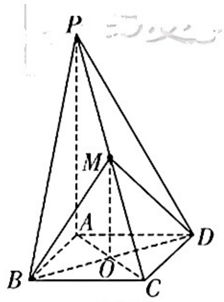
9. ACD 【解析】因为男生样本量=男生人数÷全体学生数×总样本量$=\frac{500}{900}\times180=100$,故 A 正确;样本均值 $\overline{\omega}=\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{y}=\frac{100}{100+80}\times170+\frac{80}{100+80}\times161=166$,故 C 正确,B 错误;样本方差:$s^2=\frac{1}{m+n}\{m[s_1^2+(\overline{x}-\overline{\omega})^2]+n[s_2^2+(\overline{y}-\overline{\omega})^2]\}=\frac{1}{180}\{100\times[19+(170-166)^2]+80\times[28+(161-166)^2]\}=43$,故 D 正确.故选 ACD.

10. BC 【解析】对于 A 中,当直线过点$(2,3)$和原点时,此时直线方程为 $y=\frac{3}{2}x$,满足题意;当直线过点$(2,3)$,且斜率 $k=-1$ 时,可得直线方程为 $x+y-5=0$,满足题意,所以经过点$(2,3)$且在两坐标轴上截距相等的直线有两条,所以 A 不正确;对于 B 中,当直线的斜率不存在时,此时直线方程为 $x=2$,不满足题意;当直线的斜率存在时,设直线方程为 $y-3=k(x-2)$,即 $kx-y-2k+3=0$,可得$\frac{|-2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,整理得 $3k^2-12k+8=0$,因为 $\Delta=(-12)^2-4\times3\times8>0$,所以经过点$(2,3)$且与原点距离等于 1 的直线有两条,所以 B 正确;对于 C 中,因为点$(2,3)$满足方程$(x-2)^2+(y-1)^2=4$,所以点$(2,3)$在圆上,所以过点$(2,3)$且与圆$(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 相切的直线只有一条,所以 C 正确;对于 D 中,因为点$(2,3)$在圆$(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 上,根据圆与圆的位置关系,可得过点$(2,3)$且与圆$(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 相切的圆有无数个,所以 D 错误,故选 BC.

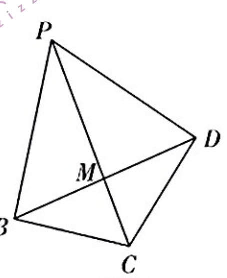
11. BCD 【解析】对于 A,连接 BD,且 $AC\cap BD=O$,如图(1)所示,当 M 在 PC 中点时,因为点 O 为 AC 的中点,所以 $OM\,/\!/\,PA$,因为 $PA\perp$平面 $ABCD$,所以 $OM\perp$平面 $ABCD$,又因为 $AC\subset$平面 $ABCD$,所以 $OM\perp AC$,因为 $ABCD$ 为正方形,所以 $AC\perp BD$.

又因为 $BD\cap OM=O$,且 $BD,OM\subset$平面 BDM,所以 $AC\perp$平面 BDM,因为 $BM\subset$平面 BDM,所以 $AC\perp BM$,所以 A 错误;

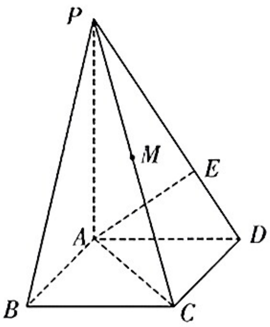
对于 B,将$\triangle PBC$ 和$\triangle PCD$ 所在的平面,沿着 PC 展开在一个平面上,如图(2)所示,则 $MB+MD$ 的最小值为 BD,直角$\triangle PBC$ 斜边 PC 上高为$\frac{1\times\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$,即$\frac{\sqrt{30}}{6}$,所以 $MB+MD$ 的最小值为$\frac{\sqrt{30}}{3}$,所以 B 正确;



图(1)



图(2)



图(3)

对于 C,易知四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球直径为 PC,半径 $R=\frac{1}{2}PC=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,表面积 $S=4\pi R^2=6\pi$,所以 C 正确;

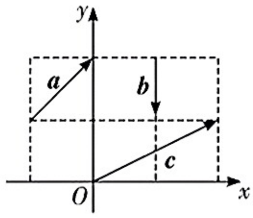
对于 D,点 M 到直线 AB 的距离的最小值即为异面直线 PC 与 AB 的距离,因为 $AB\,/\!/\,CD$,且 $AB\not\subset$平面 PCD,$CD\subset$平面 PCD,所以 $AB\,/\!/$平面 PCD,所以直线 AB 到平面 PCD 的距离等于点 A 到平面 PCD 的距离,过点 A 作 $AE\perp PD$,由 $CD\perp$平面 PAD,$AE\subset$平面 PAD,所以 $AE\perp CD$,因为 $PD\cap CD=D$,且 PD,$CD\subset$平面 PCD,所以 $AE\perp$平面 PCD,所以点 A 到平面 PCD 的距离,即为 AE 的长,如图(3)所示,在 Rt$\triangle PAD$ 中,$PA=2$,$AD=1$,可得 $PD=\sqrt{5}$,所以 $AE=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,即直线 AB 到平面 PCD 的距离等于$\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以 D 正确,故选 BCD.

12. AC 【解析】由已知第 1 列数 $a_1, a_2, a_5, \cdots$ 成等差数列，且 $a_2=2, a_{10}=8$. 设第 1 列数所组成的等差数列公差为 d，则 $d=\frac{a_{10}-a_2}{2}=\frac{8-2}{2}=3$，所以 $a_1=a_2-d=-1$，选项 A 正确；第 1 行共有 1 项，第 2 行共有 3 项，第 3 行共有 5 项，…，第 n 行共有 $2n-1$ 项，所以前 1 行共有 1^2 项，前 2 行共有 2^2 项，前 3 行共有 3^2 项，…，前 5 行共有 25 项，所以 a_{26} 位于第 6 行第 1 列，故选项 B 错误；第 1 列数所组成的等差数列第 n 行的第 1 项为：$(-1)+(n-1)d=3n-4$，且每一行中的数按从左到右的顺序均构成以 2 为公比的等比数列，所以第 n 行的数构成以 $3n-4$ 为首项，公比为 2 的等比数列，所以 $a_{n^2}=(3n-4)\cdot 2^{2n-2}=(3n-4)\cdot 4^{n-1}$，故选项 C 正确；因为第 1 列数组成等差数列，则第 m 行第 n 列数：$a_{m,n}=(3m-4)\cdot 2^{n-1}=80$，即 $3m-4=\frac{160}{2^n}(m,n\in\mathbf{N}^*)$，$\therefore m=28, n=1; m=8, n=3; m=3, n=5$，故选项 D 错误. 故选 AC.

三、填空题(本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分)

13. -4 【解析】$g(-8)=-f(8)=-\sqrt[6]{8^2}=-4$.

14. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 【解析】建立如图所示平面直角坐标系，则 $\boldsymbol{a}=(1,1), \boldsymbol{b}=(0,-1), \boldsymbol{c}=(2,1), \boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}=(2\lambda,\lambda-1)$，因为向量 $\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，有 $2\lambda=\lambda-1\Rightarrow\lambda=-1$，则 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}=(1,0)$，所以 $|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}|=1, |\boldsymbol{c}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，则 $\cos\langle(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}),\boldsymbol{c}\rangle=\frac{(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



15. 42 【解析】$\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_6^k\cdot 2^{6-k}\cdot(-1)^k x^{18-4k}, k\in\mathbf{N}, 0\leqslant k\leqslant 6$，

所以 $\sum_{i=0}^{6} m_i=\sum_{k=0}^{6}(18-4k)=18\times 7-4\sum_{k=0}^{6}k=42$.

16. $\frac{1}{2}$ 【解析】先证明：$\sin\alpha+\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

由 $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ 两边同时乘以 $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ 可得：$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$，即 $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)$. 设 $|MF_1|=m, |MF_2|=n, |F_1F_2|=2c$，则 $m+n=2a$. 在 $\triangle MF_1F_2$ 中，由正弦定理可得：$\frac{n}{\sin\alpha}=\frac{m}{\sin\beta}=\frac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}$，所以 $\frac{m+n}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}$. 所以该椭圆离心率 $e=\frac{2c}{2a}=\frac{2c}{m+n}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{1}{2}$.

四、解答题(本大题共 6 个小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17.【解析】(1) A 表示甲在第一局失利，B 表示甲获得了比赛胜利，则

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{(1-p)p^3+(1-p)C_3^2p^2(1-p)p}{1-p}=p^3(4-3p)=\frac{5}{16}$. …………………………… 4 分

(2)在五局三胜制中甲获胜的概率为：

$p_1=p^3+C_3^2p^2(1-p)p+C_4^2p^2(1-p)^2p=p^3(6p^2-15p+10)$. …………………………… 6 分

在三局两胜制中甲获胜的概率为：

$p_2=p^2+C_2^1p^2(1-p)=3p^2-2p^3$. …………………………… 8 分

于是 $p_1-p_2=p^3(6p^2-15p+10)-(3p^2-2p^3)=3p^2(2p^3-5p^2+4p-1)=3p^2(p-1)^2(2p-1)$. …… 9 分

当 $p>\frac{1}{2}$ 时，$p_1-p_2>0$，

故采用 5 局 3 胜制下甲获胜的概率更大. …………………………… 10 分

18.【解析】设 $\angle BAD=\angle CAD=\theta\left(\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

(1)因为 AD 平分 $\angle BAC$, $AB=BC=3$，故 $\angle C=\angle BAC=2\theta$.

在$\triangle ADC$中，由正弦定理知：$\frac{AD}{CD}=\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle DAC}=\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$， ………………………………………………………………… 2 分

又由余弦定理有$\cos 2\theta=\cos C=\frac{CA^2+CB^2-BA^2}{2CA\cdot CB}=\frac{3^2+2^2-3^2}{2\times3\times2}=\frac{1}{3}$，

又$\cos 2\theta=\frac{1}{3}=2\cos^2\theta-1$，所以$\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

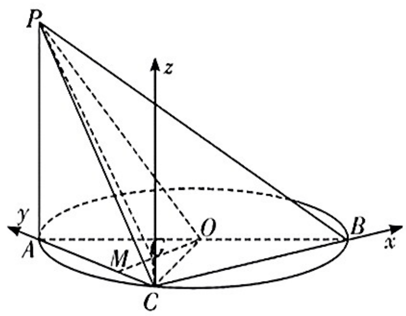
即$\frac{AD}{CD}=2\cos\theta=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. ………………………………………………………………………………………… 6 分

(2)由$\cos A=\frac{11}{14}$，得$\cos 2\theta=\frac{11}{14}$，则$\cos\theta=\frac{5\sqrt{7}}{14}$.

又由$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 2\theta=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}(AB+AC)AD\sin\theta$，

得$AD=\frac{AB\cdot AC\sin 2\theta}{(AB+AC)\sin\theta}=\frac{12}{5}\cos\theta=\frac{6\sqrt{7}}{7}$. ……………………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)如图，延长OG交AC于点M.



因为G为$\triangle AOC$的重心，所以M为AC的中点.

因为O为AB的中点，所以$OM/\!/BC$.

因为AB是圆O的直径，所以$BC\perp AC$，所以$OM\perp AC$. ……………… 2 分

因为$PA\perp$平面ABC，$OM\subset$平面ABC，所以$PA\perp OM$.

又$PA\subset$平面PAC，$AC\subset$平面PAC，$PA\cap AC=A$，

所以$OM\perp$平面PAC. 即$OG\perp$平面PAC. ………………………………………………………………………… 4 分

又$OG\subset$平面OPG，所以平面$OPG\perp$平面PAC. ……………………………………………………………… 6 分

(2)以点C为原点，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{AP}$方向分别为x,y,z轴正方向建立空间直角坐标系$C-xyz$，

则$C(0,0,0)$，$A(0,1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$O\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$P(0,1,1)$，$M\left(0,\frac{1}{2},0\right)$，

则$\overrightarrow{OM}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$，$\overrightarrow{OP}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$.

设平面OPM的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OM}=-\frac{\sqrt{3}}{2}x=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OP}=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+z=0,\end{cases}$

令$z=1$，得$\boldsymbol{n}=(0,-2,1)$. ………………………………………………………………………………………… 9 分

过点C作$CH\perp AB$于点H，由$PA\perp$平面ABC，易得$CH\perp PA$，又$PA\cap AB=A$，所以$CH\perp$平面PAB，即$\overrightarrow{CH}$为平面PAO的一个法向量.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，由$AB=2AC$，得$\angle ABC=30°$，则$\angle HCB=60°$，$CH=\frac{1}{2}CB=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以$x_H=CH\cos\angle HCB=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$y_H=CH\sin\angle HCB=\frac{3}{4}$，所以$\overrightarrow{CH}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4},0\right)$. ……………………… 10 分

设二面角$A-OP-G$的大小为θ，则$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{CH}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CH}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|0\times\frac{\sqrt{3}}{4}-2\times\frac{3}{4}+1\times0\right|}{\sqrt{\frac{3}{16}+\frac{9}{16}}\times\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$. …………… 11 分

故所求二面角$A-OP-G$的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$. ……………………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)当 $n=1$ 时,由题意得 $a_1=1$. ………………………………………………………………………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时,$(a_1+2a_2+4a_3+\cdots+2^{n-1}a_n)-(a_1+2a_2+4a_3+\cdots+2^{n-2}a_{n-2})=n-(n-1)=1$,

得 $2^{n-1}a_n=1$,即 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. ………………………………………………………………………… 3 分

经验证可知 $a_1=1$ 也满足上式,所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. ……………………………… 4 分

(2)数列$\{c_n\}$为:$\frac{1}{2},\left(\frac{1}{2}\right)^2,\left(\frac{1}{2}\right)^4,\left(\frac{1}{2}\right)^5,\left(\frac{1}{2}\right)^7,\left(\frac{1}{2}\right)^8,\left(\frac{1}{2}\right)^{10},\left(\frac{1}{2}\right)^{11},\cdots$,所以奇数项是以$\frac{1}{2}$为首项,$\frac{1}{8}$为公比的等比数列,偶数项是以$\left(\frac{1}{2}\right)^2$为首项,$\frac{1}{8}$为公比的等比数列. ……………………………… 5 分

$T_{2n}=c_1+c_2+\cdots+c_{2n}=(c_1+c_3+\cdots+c_{2n-1})+(c_2+c_4+\cdots+c_{2n})$

$=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{3n-2}\right]+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{3n-1}\right]=\dfrac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{8}}+\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[1-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{8}}$

$=\frac{6}{7}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n$. ………………………………………………………………………………………… 8 分

$T_{2n+1}=T_{2n}+c_{2n+1}=\frac{6}{7}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^n=\frac{6}{7}-\frac{5}{14}\left(\frac{1}{8}\right)^n$. ………………………………………………… 9 分

$\dfrac{T_{2n}}{T_{2n+1}}=\dfrac{12-12\times\left(\frac{1}{8}\right)^n}{12-5\times\left(\frac{1}{8}\right)^n}=\dfrac{12}{5}-\dfrac{84}{5}\dfrac{1}{12-5\times\left(\frac{1}{8}\right)^n}$,

显然$\dfrac{T_{2n}}{T_{2n+1}}$是关于 n 的增函数,所以$\dfrac{T_{2n}}{T_{2n+1}}\geqslant\dfrac{12}{13}$. …………………………………………………… 11 分

所以 λ 的最大值为$\frac{12}{13}$. ……………………………………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)由题意,得函数 $f(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$,且 $f'(x)=\frac{a}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}$. ………… 2 分

若 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极值点,则 $f'(1)=0$,$a=2$.

此时 $f'(x)=\frac{-x^2+2x-1}{x^2}=\frac{-(x-1)^2}{x^2}\leqslant 0$,函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递减. ……………………… 4 分

故 $x=1$ 不是函数 $f(x)$的极值点,所以不存在 a 满足条件. ……………………………………………… 5 分

(2)由题意可知 $f(x)+f(2-x)=0$ 在 $x\in(0,1)$上有解.

所以$\left[a\ln x-x+\frac{1}{x}\right]+\left[a\ln(2-x)-(2-x)+\frac{1}{2-x}\right]=0$ 在 $x\in(0,1)$上有解. ……………………… 6 分

该方程化简得 $a\ln(2x-x^2)+\frac{2}{2x-x^2}-2=0$.

令 $t=2x-x^2\in(0,1)$,得 $a\ln t+\frac{2}{t}-2=0$,所以问题等价于方程 $a\ln t+\frac{2}{t}-2=0$ 在 $t\in(0,1)$上有解. ……
…… 7 分

令 $h(t)=a\ln t+\frac{2}{t}-2,t\in(0,1)$,有 $h'(t)=\frac{a}{t}-\frac{2}{t^2}=\frac{at-2}{t^2}$. ……………………………………… 8 分

当 $a\leqslant 2$ 时,$h(t)$在$(0,1)$单调递减,又 $h(1)=0$,所以 $h(t)$在$(0,1)$上无零点,不成立. ………………… 9 分

当 $a>2$ 时,$h(t)$在$\left(0,\frac{2}{a}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{2}{a},1\right)$上单调递增,且 $h(1)=0$. ……………………… 10 分

所以有 $h\left(\frac{2}{a}\right)<0, h\left(\frac{1}{a^2}\right)=a\ln\frac{1}{a^2}+2a^2-2=a(a-2\ln a)+a^2-2>0.$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 11 分

故 $h(t)$ 在 $\left(0,\frac{2}{a}\right)$ 上有一个零点，在 $\left(\frac{2}{a},1\right)$ 上没有零点.

综上，当 $a>2$ 时，$f(x)$ 图象上总存在一对关于点 $(1,0)$ 对称的两点. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 12 分

22.**【解析】**(1) 由题意可设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 1 分

则 $\begin{cases}2b=2,\\ \frac{b}{a}=\frac{1}{2},\end{cases}$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 2 分

解得 $a=2, b=1$，所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 3 分

(2)(ⅰ) 设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，直线 AB 的方程为 $x=ty+4$,

由 $\begin{cases}x=ty+4,\\ \frac{x^2}{4}-y^2=1,\end{cases}$ 消元得 $(t^2-4)y^2+8ty+12=0$. 则 $t\neq\pm2, \Delta=16t^2+192>0$，且 $\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{8t}{t^2-4},\\ y_1y_2=\frac{12}{t^2-4},\end{cases}$ ⋯⋯ 5 分

$\therefore \frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}}=\frac{y_1}{x_1+2}\times\frac{x_2-2}{y_2}=\frac{y_1(ty_2+2)}{y_2(ty_1+6)}=\frac{ty_1y_2+2y_1}{ty_1y_2+6y_2}$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 6 分

$=\frac{ty_1y_2+2(y_1+y_2)-2y_2}{ty_1y_2+6y_2}=\frac{\frac{12t}{t^2-4}-\frac{16t}{t^2-4}-2y_2}{\frac{12t}{t^2-4}+6y_2}=\frac{-\frac{4t}{t^2-4}-2y_2}{\frac{12t}{t^2-4}+6y_2}=-\frac{1}{3}$; ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 7 分

(ⅱ) 由 (ⅰ) 知，$k_2=-3k_1$，设直线 AN 的斜率为 k_3,

则 $k_1\cdot k_3=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{1}{4}$, ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 8 分

所以 $k_2\cdot k_3=-\frac{3}{4}$，即 $\tan\alpha=\frac{3}{4\tan\beta}$, ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 9 分

由 $\alpha=\beta-\theta$ 可得 $\tan\alpha=\tan(\beta-\theta)$，化简得：$\frac{3}{4\tan\beta}=\frac{\tan\beta-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}\tan\beta}$，解得：$\tan\beta=-\frac{3}{4}$（舍），$\tan\beta=1$.

所以直线 BN 的方程为 $x=-y+2$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 10 分

由 $\begin{cases}x=-y+2,\\ \frac{x^2}{4}-y^2=1\end{cases}$ 可得：$-3y^2-4y=0$，即 B 点的纵坐标为 $-\frac{4}{3}$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 11 分

所以 $S_{\triangle BGN}=\frac{1}{2}\times2\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 12 分