2024届“3+3+3”高考备考诊断性联考卷（一）
数学参考答案

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	B	C	B	A	D	D

【解析】

1.因为 $A=[-2,3]$，$B=[0,2]$，则 $\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$，所以 $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=[-2,0)\cup(2,3]$，故选D.

2.设 $z=x+yi$（$x,y\in\mathbf{R}$），则 $\bar{z}=x-yi$，由 $2z-\bar{z}=x+3yi=1+3i$，可得 $x=y=1$，所以 $z=1+i$，

所以 $\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{1-i^2}=\dfrac{2i}{2}=i$，故选A.

3. $f(x)$ 为偶函数，则 $f(0)=\sin\varphi=\pm1$，解得 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，当 $k\neq1$ 时，$\varphi\neq\dfrac{3\pi}{2}$；又当 $\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$ 时，$f(x)=-\cos2x$ 为偶函数，所以甲是乙的必要不充分条件，故选B.

4.沿正方体上底面的对角线作圆锥的轴截面，设正方体的棱长为 $\sqrt{2}x$，则由三角形相似可得 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{1-\sqrt{2}x}{1}$，

即 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$，所以正方体棱长为 $2-\sqrt{2}$，故选C.

5. $\sin\alpha-2\cos\alpha=\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}-2\left(\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\tan^2\dfrac{\alpha}{2}+2\tan\dfrac{\alpha}{2}-2}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}=2$，故选B.

6.记 A_i 为第 i 次摸到的是红球，则 $P(A_1|A_2)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}$，又 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{10}$，

$P(A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A_1}A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{2}{5}$，所以

$P(A_1|A_2)=\dfrac{1}{4}$，故选A.

7.设曲线 E 上任意一点为 $P(x,y)$，则由题设可得 $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=|PA|+|PB|$ $=6\sqrt{2}>|AB|$，可得曲线 E 的轨迹是以 A，B 为焦点且长轴长为 $6\sqrt{2}$ 的椭圆，所以△BCD 的周长等于 $(|DB|+|DA|)+(|CB|+|CA|)=2\times6\sqrt{2}=12\sqrt{2}$，故选D.

8.设一个切点为 $\left(x_0,\dfrac{x_0}{e^{x_0}}\right)$，则由 $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$，可得该点处的切线方程 $l:y-\dfrac{x_0}{e^{x_0}}=\dfrac{1-x_0}{e^{x_0}}(x-x_0)$，当 l 经

过点 P 时，有 $m-\frac{x_0}{e^{x_0}}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}\left(-1-x_0\right)$，即 $m=\frac{x_0^2+x_0-1}{e^{x_0}}$，则过点 P 切线的条数即为方程

$m=\frac{x_0^2+x_0-1}{e^{x_0}}$ 的解的个数.设 $g(x)=\frac{x^2+x-1}{e^x}$，则

$g'(x)=\frac{2x+1-x^2-x+1}{e^x}=\frac{-x^2+x+2}{e^x}=\frac{-(x+1)(x-2)}{e^x}$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(2,+\infty)$ 上单调递

减，在 $(-1,2)$ 上单调递增.当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to 0$，又由

$g(2)=\frac{4+2-1}{e^2}=\frac{5}{e^2}$，$g(-1)=-e<0$，可得 $m\in\left(0,\frac{5}{e^2}\right)$ 时，$m=\frac{x_0^2+x_0-1}{e^{x_0}}$ 有三个解，故选 D.

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	BCD	ACD	ACD	AB

【解析】

9.对于选项 A，9 个数据从小到大排列，由于 $9\times0.75=6.75$，所以第 75 百分位数应该是第 7 个数 8，故 A 错误；对于选项 B，由 M，N 相互独立得：$P(MN)=P(M)P(N)$，所以 $P\left(N\middle|M\right)=\frac{P(MN)}{P(M)}=P(N)$，

$P\left(N\middle|M\right)+P\left(\overline{N}\right)=P(N)+PP\left(\overline{N}\right)=1$，故 B 正确；对于选项 C，由 $\chi^2=8.612<x_{0.001}=10.828$，可以认为 X 和 Y 独立，故 C 正确；对于选项 D，样本点都在直线 $y=-4x+7$，说明是负相关且为线性函数关系，所以相关系数为 -1，故 D 正确，故选 BCD.

10.对于 A，因为 $\vec{b}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$，所以 $\vec{b}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，故 A 正确；

对于 B，因为 $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|2\vec{b}\right|^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，所以 B 错误；

对于 C，因为 $\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$，$\vec{b}$ 都是单位向量，由平行四边形法则和菱形性质知 $\vec{c}$ 对应有向线段平分 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角，由题设知 $\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\pi}{3}$，$\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{\left|\vec{c}\right|\left|\vec{a}\right|}=\cos\left\langle\vec{c},\vec{a}\right\rangle=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 所以 C 正确；

对于 D，由 A 选项知：$\vec{b}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，所以由向量减法的几何意义直接看出结果成立.

另法：$\left|\vec{a}-\lambda\vec{b}\right|\geq\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ 恒成立，则 $\left(\vec{a}-\lambda\vec{b}\right)^2\geq\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$，即 $\vec{a}^2-2\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}+\lambda^2\vec{b}^2\geq\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$，整理得 $(\lambda-1)^2\geq0$，此式恒成立，所以 $\forall\lambda\in\mathbf{R}$，$\left|\vec{a}-\lambda\vec{b}\right|\geq\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ 恒成立，所以 D 正确，故选 ACD.

11.A 选项，如图 1，由圆的切线性质及勾股定理可得：$|PA|=\sqrt{|PO|^2-|OA|^2}=\sqrt{26-4}=\sqrt{22}$，所以 A 选项正确；B 选项，$O$ 到直线 $l:x+y-6=0$ 的距离为 $\frac{|0+0-6|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，而 $|PA|^2=|OP|^2-|OA|^2\geq(3\sqrt{2})^2-4=14$，所以 $|PA|$ 的最小值为 $\sqrt{14}$，所以三角形 PAO 面积的最小值为 $\frac{1}{2}\times\sqrt{14}\times2=\sqrt{14}$，所以 B 选项错误；C 选项，设 $P(a,6-a)$，$\frac{|OP|}{2}=\frac{\sqrt{a^2+(6-a)^2}}{2}=\frac{\sqrt{2a^2-12a+36}}{2}$，线段 OP 的中点坐标为 $\left(\frac{a}{2},\frac{6-a}{2}\right)$，所以以 OP 为直径的圆的方程为 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{6-a}{2}\right)^2=\frac{2a^2-12a+36}{4}$，$x^2+y^2-ax-(6-a)y=0$，由 $x^2+y^2=4$，两式相减得直线 AB 的方程为：$ax+(6-a)y=4$，$a(x-y)+6y-4=0$，由 $\begin{cases}x-y=0,\\6y-4=0,\end{cases}$ 解得 $x=y=\frac{2}{3}$，所以直线 AB 过定点 $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，C 选项正确（法二：直线 AB 的方程也可直接由圆的切点弦方程直接求出）；D 选项，由 C 选项知，圆心 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{2a^2-12a+36}}\in\left(0,\frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$，所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-d^2}\in\left[\frac{4\sqrt{7}}{3},4\right)$，D 选项正确，故选 ACD.

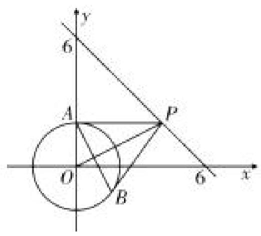

图 1

12.对于 A 选项，如图 2，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 OA'，则由题设知 $BD\perp AC$，$BD\perp A'O$，所以 $BD\perp$ 平面 $A'OC$，故 $BD\perp A'C$，A 选项正确；对于 B，由题意可知
$S_{\triangle A'DC}=S_{\triangle A'BC}=\frac{1}{2}A'C\cdot BM=A'M\cdot BM$，因为 $A'B^2=A'M^2+BM^2=4$，故 $A'M\cdot BM\leq\frac{A'M^2+BM^2}{2}=2$，当且仅当 $A'M=BM=\sqrt{2}$ 时取得等号，故 $S_{\triangle A'DC}$，$S_{\triangle A'BC}$ 的最大值为 2，而 $S_{\triangle A'BD}=S_{\triangle CBD}=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin60^\circ=\sqrt{3}$，则四面体 $A'-BCD$ 的表面积的最大值为 $(S_{\triangle A'DC}+S_{\triangle A'BC})_{\max}+S_{\triangle A'BD}+S_{\triangle CBD}=4+2\sqrt{3}$，B 正确；C 选项，不妨假设存在点 A'，使得 $BM\perp CD$，取 CD 的中点为 N，连接 MN，BN，M 为线段 $A'C$ 的中点，故 $MN//A'D$；由于在菱形 $ABCD$ 中，$AB=BC$，$\therefore A'B=BC$，而 M 为线段 $A'C$ 的中点，故 $BM\perp A'C$.由于 $CD\cap A'C=C$，

CD，$A'C\subset$平面$A'DC$，故$BM\perp$平面$A'DC$，$MN\subset$平面$A'DC$，故$BM\perp MN$，而$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，

故$\angle BCD=\frac{\pi}{3}$，即$\triangle BCD$为正三角形，则$BC=BD$，故$BN=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\sqrt{3}$.又$MN//A'D$，且

$MN=\frac{1}{2}A'D=1$，故$BM=\sqrt{BN^2-MN^2}=\sqrt{2}$.由于$BM\perp A'C$，故

$A'M=\sqrt{A'B^2-BM^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}\therefore A'C=2\sqrt{2}$.因为$A'O=OC=\sqrt{3}$，满足$A'O+OC>A'C$，即

当$A'C=2\sqrt{2}$时，使得$BM\perp CD$，C错误；对于D，因为$OC\perp BD$，$OA'\perp BD$，故$\angle A'OC$为二面角

$A''-BD-C$的平面角，即$\cos\angle A'OC=\frac{1}{3}$，所以

$\frac{A'O^2+OC^2-A'C^2}{2A'O\cdot OC}=\frac{3+3-A'C^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{6-A'C^2}{6}=\frac{1}{3}$，即$A'C=2$，而

$A'D=A'B=BD=BC=CD=2$，则四面体$A'-BCD$为正四面体，故将其补成如图3所示正方体，且正

方体棱长为$\sqrt{2}$，则四面体$A'-BCD$的体积$V=\left(\sqrt{2}\right)^3-4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}\right)^2\times\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则四面体

$A'-BCD$的内切球半径$r=\frac{3V}{4S_{\triangle BDC}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，D错误，故选AB.

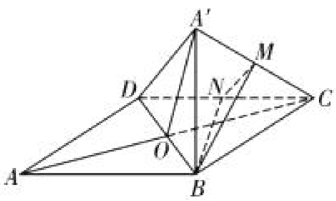

图2

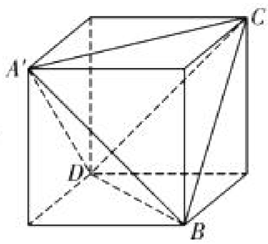

图3

三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

题号	13	14	15	16
答案	135	$x^2=4y$	8	$3\sqrt{3}$

【解析】

13.设展开式的第$r+1$项是$T_{r+1}=C_6^r\left(3x^2\right)^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=C_6^r3^{6-r}(-1)^rx^{12-3r}$，令$r=4$，所以$T_5=C_6^43^{6-4}(-1)^4$

$=135$.

14.由题意可知：圆心M到点$(0,1)$的距离与到直线$y=-1$的距离相等，所以根据抛物线的定义可知圆心M

的轨迹是以$(0,1)$为焦点，$y=-1$为准线的抛物线，故得圆心M的轨迹方程为$x^2=4y$.

15.由已知 $f(x)=f(-x)$，且 $f(12+x)=-f(-x)$，$\therefore f(x+24)=f(12+(12+x))=-f\left[-(12+x)\right]$

$=-f(12+x)=f(-x)=f(x)$，即函数 $f(x)$ 是以 24 为周期的周期函数，故 $f(2024)=f(84\times24+8)=$

$f(8)=f\left[12+(-4)\right]=-f(4)=8$.

16.如图 4 所示，设圆 C 逆时针绕圆 O 转过的圆心角 $\angle AOC=\theta$，点 A 转到点 A_1，则由题设知

$\angle A_1CO=2\theta$，过点 C 作 $CD//x$ 轴，再过点 A_1 作 $A_1B\perp CD$，垂足为 B，则 $\angle A_1CB=\pi-3\theta$.设

$A_1(x,y)$，则 $x=|OC|\cos\theta+|A_1C|\cos(\pi-3\theta)=3\cos\theta-\cos3\theta$，

$y=|OC|\sin\theta-|A_1C|\sin(\pi-3\theta)=3\sin\theta-\sin3\theta$，所以

$|AA_1|^2=(3\cos\theta-\cos3\theta-2)^2+(3\sin\theta-\sin3\theta)^2=4\cos3\theta-6\cos2\theta-12\cos\theta+14=$

$4\left(4\cos^3\theta-3\cos\theta\right)-6\left(2\cos^2\theta-1\right)-12\cos\theta+14=16\cos^3\theta-12\cos^2\theta-24\cos\theta+20$，令

$t=\cos\theta$，则 $|AA_1|^2=f(t)=16t^3-12t^2-24t+20$，$t\in[-1,1]$，又 $f'(t)=24(2t+1)(t-1)$，$t\in[-1,1]$.

由 $f'(t)>0$，得 $-1\le t<-\frac{1}{2}$；$f'(t)<0$，得 $-\frac{1}{2}<t<1$，易知 $f(t)_{\max}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=27$，故

$|AA_1|_{\max}=3\sqrt{3}$.

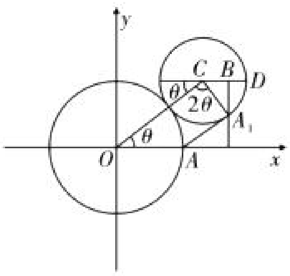

图 4

四、解答题（共 70 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

解：（1）因为 $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ 成等差数列，所以 $2\sin B=\sin A+\sin C$.

由正弦定理得 $2b=a+c$，又 $b=5$，$c=3$，所以 $a=7$.

由余弦定理得，$\cos A=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\dfrac{1}{2}$，$A\in(0,\pi)$，故 $A=\dfrac{2\pi}{3}$.

（2）由三角形内角平分线性质知：$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{5}$，

又 C，D，B 三点共线，所以 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AC}$，

所以$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{\left(\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}\right)^2+2\times\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}\cdot\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}+\left(\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}\right)^2}=\frac{15}{8}$.

18.（本小题满分 12 分）

证明：（1）由数列$\{a_n\}$的前n项积为T_n，得$a_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}(n\geq 2)$，

由题设$T_{n+1}=2T_n-\frac{T_n}{a_n}$，

可得$T_{n+1}=2T_n-T_{n-1}\Rightarrow 2T_n=T_{n+1}+T_{n-1}$，

所以数列$\{T_n\}$是等差数列.

由题设$a_1=\frac{1}{3}$，故$T_1=\frac{1}{3}$，$T_2=2T_1-\frac{T_1}{a_1}=2\times\frac{1}{3}-1=-\frac{1}{3}$，$T_2-T_1=-\frac{2}{3}$，

所以$\{T_n\}$是首项为$\frac{1}{3}$，公差为$-\frac{2}{3}$的等差数列，

故$T_n=\frac{1}{3}+(n-1)\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}n+1$.

（2）$\lg|a_1|+\lg|a_2|+\lg|a_3|+\cdots+\lg|a_{1500}|=\lg|a_1a_2a_3\cdot\cdots\cdot a_{1500}|=\lg|T_{1500}|$

$=\lg\left|-\frac{2}{3}\times 1500+1\right|=\lg 999<\lg 1000=3$.

19.（本小题满分 12 分）

解：（1）设小张答对的题目数为X，可知随机变量X服从超几何分布，X的取值分别为 1，2，3，4.

有$P(X=1)=\frac{C_7^1C_3^3}{C_{10}^4}=\frac{7}{210}=\frac{1}{30}$，$P(X=2)=\frac{C_7^2C_3^2}{C_{10}^4}=\frac{63}{210}=\frac{3}{10}$，

$P(X=3)=\frac{C_7^3C_3^1}{C_{10}^4}=\frac{105}{210}=\frac{1}{2}$，$P(X=4)=\frac{C_7^4C_3^0}{C_{10}^4}=\frac{35}{210}=\frac{1}{6}$，

故小张答对的题目数X的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

设小王答对的题目数为Y，可知随机变量Y服从二项分布$Y\sim B(4,p)$，Y的取值分别为 0，1，2，3，4，

有$P(Y=0)=(1-p)^4$，

$P(Y=1)=C_4^1(1-p)^3p=4p(1-p)^3$，

$P(Y=2)=C_4^2(1-p)^2p^2=6p^2(1-p)^2$，

$P(Y=3)=C_4^3(1-p)p^3=4p^3(1-p)$，

$P(Y=4)=p^4$.

故小王答对的题目数Y的分布列为

Y	0	1	2	3	4
P	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4

（2）由（1）可知$E(X)=1\times\frac{1}{30}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{6}=\frac{14}{5}$，$E(Y)=4p$，

若预测小张答对的题目数多于小王答对的题目数，

则$E(X)>E(Y)$，即$\frac{14}{5}>4p$，可得$0<p<\frac{7}{10}$.

20.（本小题满分12分）

（1）证明：如图5，过E在平面A_1EC内作$EG\perp A_1C$交A_1C于G，

因为平面$A_1BC\perp$平面A_1EC，平面$A_1BC\cap$平面$A_1EC=A_1C$，所以$EG\perp$平面A_1BC.

故$EG\perp A_1B$，又$A_1B\perp A_1E$，所以$A_1B\perp$平面A_1EC，

故$A_1B\perp EC$，

在Rt△ABE中，$AB=\sqrt{3}$，$AE=1$，$\therefore BE=2$.

同理，在Rt△EDC中，$EC=2\sqrt{3}$，

$\therefore BE^2+CE^2=2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2=16=BC^2$，$\therefore CE\perp BE$.

又$\because BE\cap A_1B=B$，$\therefore CE\perp$平面A_1BE.

又$CE\subset$平面$BCDE$，$\therefore$平面$A_1BE\perp$平面$BCDE$.

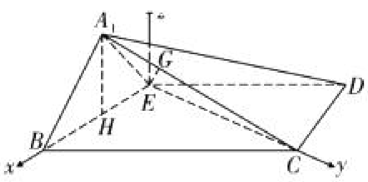

图5

（2）解：如图，作$A_1H\perp BE$，垂足为H，在△A_1BE中，可得$A_1H=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$EH=\frac{1}{2}$，

由（1）知，$EB \perp EC$，平面 $A_1BE \perp$ 平面 $BCDE$，

以点 E 为坐标原点，EB，EC 分别为 x，y 轴，过点 E 垂直平面 $BCDE$ 为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，可得 $B(2,0,0)$，$C\left(0,2\sqrt{3},0\right)$，$A_1\left(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$D\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$

则 $\overline{BA_1}=\left(-\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overline{DC}=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\overline{DA_1}=\left(2,-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

由（1）知 $A_1B \perp$ 平面 A_1EC，所以 $\overline{n_1}=2\overline{BA_1}=\left(-3,0,\sqrt{3}\right)$ 是平面 A_1EC 的一个法向量.

设平面 DA_1C 的一个法向量为 $\overline{n_2}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\overline{n_2}\cdot\overline{DC}=0,\\ \overline{n_2}\cdot\overline{DA_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{3}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b=0,\\ 2a-\frac{3\sqrt{3}}{2}b+\frac{\sqrt{3}}{2}c=0,\end{cases}$

令 $a=\sqrt{3}$，可得 $b=-3$，$c=-13$，

$\therefore \overline{n_2}=\left(\sqrt{3},-3,-13\right)$，

$\therefore \cos\left\langle\overline{n_1},\overline{n_2}\right\rangle=\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\left|\overline{n_2}\right|}=\frac{-3\times\sqrt{3}+0\times(-3)+\sqrt{3}\times(-13)}{\sqrt{(-3)^2+0^2+(\sqrt{3})^2}\times\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2+(-13)^2}}=-\frac{8\sqrt{181}}{181}$，

又 $0<\left\langle\overline{n_1},\overline{n_2}\right\rangle<\pi$，则 $\sin\left\langle\overline{n_1},\overline{n_2}\right\rangle=\sqrt{1-\cos^2\left\langle\overline{n_1},\overline{n_2}\right\rangle}=\sqrt{1-\left(-\frac{8\sqrt{181}}{181}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2353}}{181}$.

所以二面角 $E-A_1C-D$ 的正弦值为 $\frac{3\sqrt{2353}}{181}$.

21.（本小题满分 12 分）

证明：（1）法 1：导数法　法 2：判别式法（略）

由双曲线的方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，可得 $y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(x^2-a^2\right)$，

即 $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ 或 $g(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$，

其中函数 $f(x)$ 的图象即为双曲线在 x 轴的上半部分，函数 $g(x)$ 的图象即为双曲线在 x 轴的下半部分.

1、当 $y_0>0$ 时，由导数的几何意义可知：以点 $A\left(x_0,y_0\right)$ 为切点的切线斜率 $k=f'\left(x_0\right)=\frac{bx_0}{a\sqrt{x_0^2-a^2}}$，

所以切线方程为：$y-y_0=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$，

即 $y-y_0=\frac{bx_0}{a\sqrt{x_0^2-a^2}}\left(x-x_0\right)$ ①.

又 $y_0=f\left(x_0\right)=\frac{b}{a}\sqrt{x_0^2-a^2}$，故 $\sqrt{x_0^2-a^2}=\frac{ay_0}{b}$，

代入①整理得 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}$，

又切点 $A\left(x_0,y_0\right)$ 在双曲线上，故 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，

所以切线方程为：$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

2、当 $y_0<0$ 时，以点 $A\left(x_0,y_0\right)$ 为切点的切线斜率 $k=g'\left(x_0\right)=-\frac{bx_0}{a\sqrt{x_0^2-a^2}}$，

所以切线方程为：$y-y_0=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$，

即 $y-y_0=-\frac{bx_0}{a\sqrt{x_0^2-a^2}}\left(x-x_0\right)$ ②.

又 $y_0=g\left(x_0\right)=-\frac{b}{a}\sqrt{x_0^2-a^2}$，故 $\sqrt{x_0^2-a^2}=-\frac{ay_0}{b}$，

代入②整理得 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}$.

又切点 $A\left(x_0,y_0\right)$ 在双曲线上，故 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，

所以切线方程为：$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

3、当 $y_0=0$ 时，切点为 $(\pm a,0)$，切线方程为 $x=\pm a$，满足 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$，

综上：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上一点 $A\left(x_0,y_0\right)$ 为切点的切线 l 的方程为 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

（2）由（1）知，切线 l 的方程可化为 $b^2x_0x-a^2y_0y-a^2b^2=0$，

由点到直线的距离公式得

$$|F_1N_1|\cdot|F_2N_2|=\frac{\left|-b^2x_0c-a^2b^2\right|}{\sqrt{\left(b^2x_0\right)^2+\left(a^2y_0\right)^2}}\cdot\frac{\left|b^2x_0c-a^2b^2\right|}{\sqrt{\left(b^2x_0\right)^2+\left(a^2y_0\right)^2}}=\frac{\left|b^4x_0^2c^2-a^4b^4\right|}{b^4x_0^2+a^4y_0^2},$$

由 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，可得 $a^2y_0^2=b^2x_0^2-a^2b^2$，

代入上式分母整理得 $b^4x_0^2+a^4y_0^2=b^4x_0^2+a^2\left(b^2x_0^2-a^2b^2\right)=b^2c^2x_0^2-a^4b^2>0$，

所以 $|F_1N_1|\cdot|F_2N_2|=\frac{b^2\left|b^2x_0^2c^2-a^4b^2\right|}{b^2c^2x_0^2-a^4b^2}=\frac{b^2\left(b^2x_0^2c^2-a^4b^2\right)}{b^2x_0^2c^2-a^4b^2}=b^2$，

所以 $|F_1N_1|\cdot|F_2N_2|$ 为定值 b^2.

22.（本小题满分 12 分）

（1）解：$\because f(x)=\frac{x^2}{2}-1014x+1013\ln x(x>0)$，

$\therefore f'(x)=x-1014+\frac{1013}{x}=\frac{x^2-1014x+1013}{x}=\frac{(x-1)(x-1013)}{x}$.

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$ 或 $x>1013$；令 $f'(x)<0$，得 $1<x<1013$，

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为：$(0,1)$，$(1013,+\infty)$；递减区间为：$(1,1013)$.

（2）证明：法一：构造函数

法二：对数均值（略）注：若用此法证，要首先证明对数均值不等式，否则酌情扣 2-3 分.

法一：由（1）知 $0<x_1<1<x_2<1013<x_3$，

先证明：$x_1+x_2>2$，

构造函数 $F(x)=f(x)-f(2-x)(0<x<1)$.

则 $F'(x)=f'(x)+f'(2-x)=\frac{(x-1)(x-1013)}{x}+\frac{(x-1)(x+1011)}{2-x}=\frac{2026(x-1)^2}{x(2-x)}$，

所以 $F'(x)>0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立.

故 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，有 $F(x)<F(1)=f(1)-f(1)=0$，

所以 $f(x)<f(2-x)$ 在 $(0,1)$ 上恒成立.

又 $0<x_1<1$，所以 $f\left(x_2\right)=f\left(x_1\right)<f\left(2-x_1\right)$，

又 x_2，$2-x_1\in(1,1013)$，由（1）知 $f(x)$ 在 $(1,1013)$ 上单调递减，

故$x_2 > 2 - x_1$，即$x_1 + x_2 > 2$.①

再证明：$x_3 + x_2 < 2026$，

构造函数$G(x) = f(x) - f(2026 - x)(1 < x < 1013)$，

则$G'(x) = f'(x) + f'(2026 - x) = \dfrac{(x-1)(x-1013)}{x} + \dfrac{(x-2025)(x-1013)}{2026-x} = \dfrac{2(x-1013)^2}{x(2026-x)}$，

所以$G'(x) > 0$在$(1,1013)$上恒成立，

故$G(x)$在$(1,1013)$上单调递增，有$G(x) < G(1013) = f(1013) - f(1013) = 0$，

所以$f(x) < f(2026 - x)$在$(1,1013)$上恒成立.

又$1 < x_2 < 1013$，所以$f\left(x_3\right) = f\left(x_2\right) < f\left(2026 - x_2\right)$，

又x_3，$2026 - x_2 \in (1013, +\infty)$，由（1）知$f(x)$在$(1013, +\infty)$上单调递增，

故$x_3 < 2026 - x_2$，即$x_3 + x_2 < 2026$.②

由①、②得$x_3 - x_1 < 2024$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。