沧衡名校联盟高三年级 2023—2024 学年上学期期末联考

数 学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若 $(1-2i)(z-3-2i)=2+i$，则 $z=$

A. $3-3i$　　B. $3+3i$　　C. $-3+3i$　　D. $-3-3i$

2. 已知集合 $M=\{x|\ln x>1\}$，$N=\{x|(x-1)(x-4)>0\}$，则 $M\cap(\complement_{\mathbf{R}}N)=$

A. $\{x|x>e\}$　　B. $\{x|x\geqslant 4\}$

C. $\{x|1\leqslant x<e\}$　　D. $\{x|e<x\leqslant 4\}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,-3)$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,-2)$，则 $|\boldsymbol{a}|^2-\frac{1}{4}|\boldsymbol{b}|^2=$

A. 2　　B. 1　　C. -1　　D. -2

4. 已知 $0<\alpha<\beta<\pi$，则“$\tan\alpha\tan\beta=-1$”的充要条件为

A. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$　　B. $\alpha+\beta=\pi$　　C. $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$　　D. $\beta-\alpha=\frac{\pi}{4}$

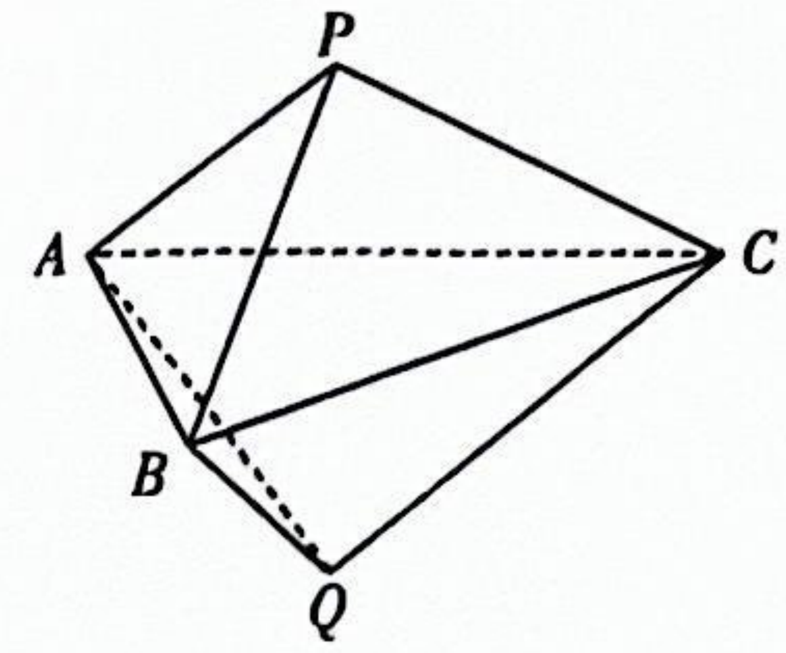
5. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 的左焦点为 F，M,N 为 C 上关于坐标原点 O 对称的两个点，若 $\triangle MNF$ 的周长为 22，则 $|OM|=$

A. 4　　B. 5　　C. 8　　D. 10

6. 某次乒乓球团体赛为五场三胜制，第一、二、四、五场为单打，第三场为双打，每支队伍有 3 名队员，每名队员出场 2 次，则每支队伍不同的出场安排种数为

A. 18　　B. 27　　C. 36　　D. 45

7. 将两个相同的正棱锥的底面重叠组成的几何体称为“正双棱锥”. 如图，在正双三棱锥 $P-ABC-Q$ 中，PA,PB,PC 两两互相垂直，则二面角 $P-AB-Q$ 的余弦值为



A. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

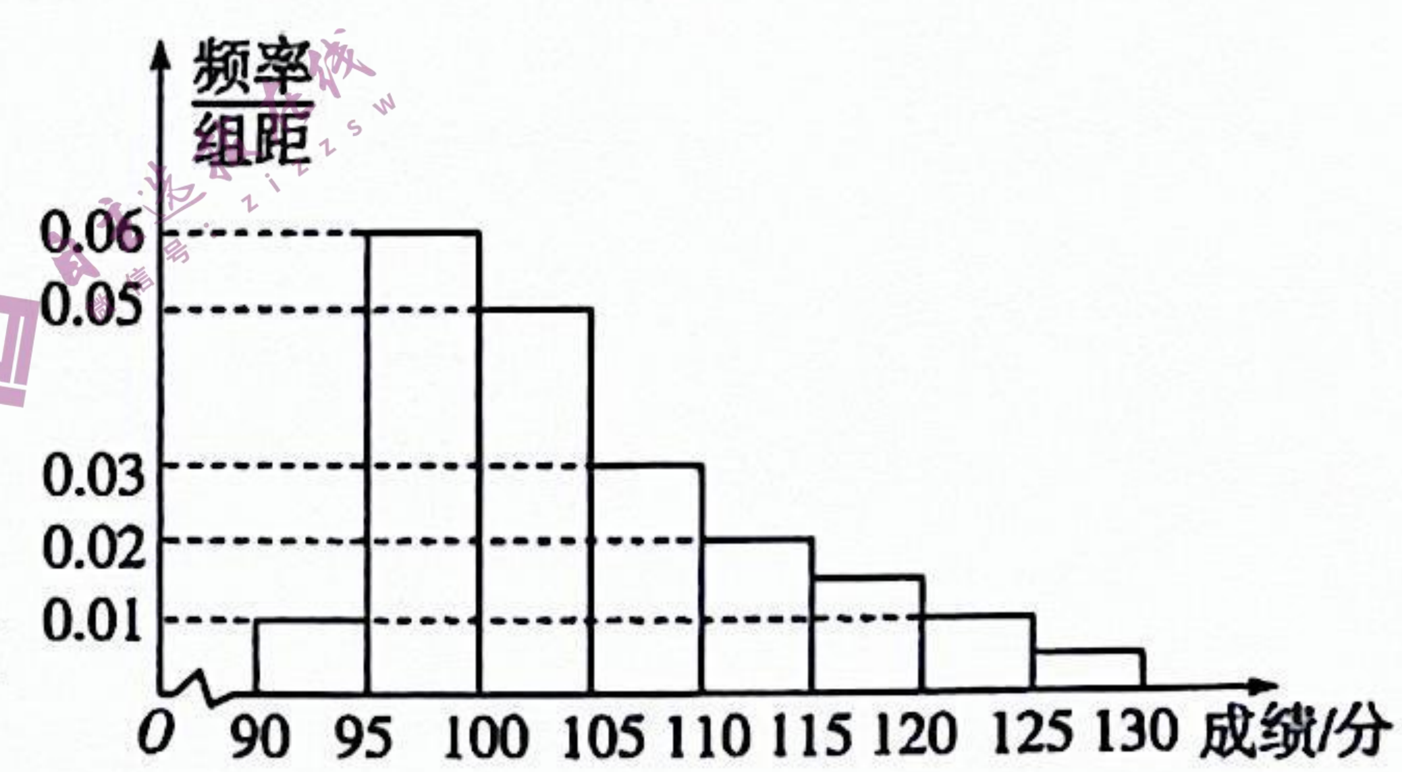
C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{3}$

8. 直线 $y=2x$ 与曲线 $y=e^x-x^2$ 的公共点的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 在一次数学考试中，某班成绩的频率分布直方图如图所示，则



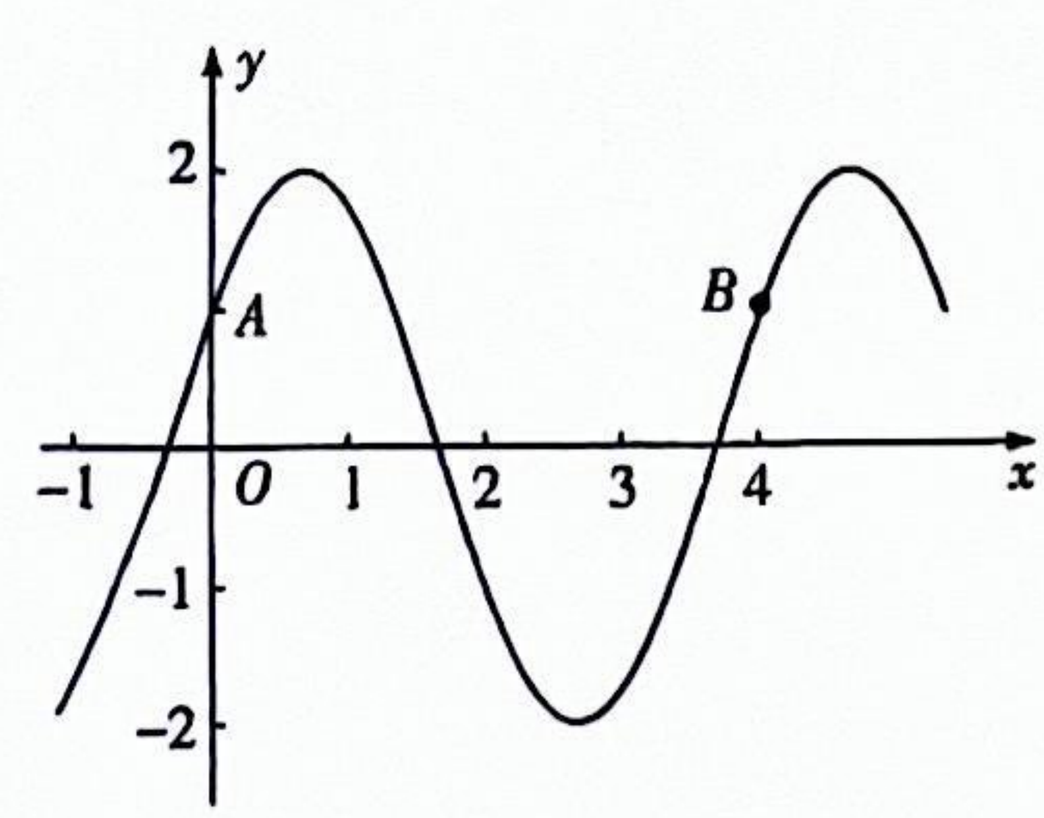
A. 该班数学成绩的极差大于 40

B. 该班数学成绩不低于 115 分的频率为 0.15

C. 该班数学成绩在 $[95,105)$ 内的学生比在 $[95,105)$ 外的学生少

D. 估计该班数学成绩的 20% 分位数为 97.5

10. 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，其中 $A(0,1)$，$B(4,1)$，则



A. $\omega=\frac{\pi}{2}$

B. $\varphi=\frac{\pi}{3}$

C. $f(x)$ 在 $\left[\frac{26}{3},10\right]$ 上单调递减

D. $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{2}{3}$ 个单位长度后所得图象对应的函数为奇函数

11. 已知函数 $f(x)=(ax+b)e^x(a\neq0)$ 满足 $(x+1)f'(x)=(x+2)f(x)$（$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数），且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线倾斜角小于 $45°$，则

A. $a=b+1$　　B. $0<a<\frac{1}{2}$

C. $f(x)$ 有且仅有 1 个零点　　D. $f(x)$ 有且仅有 1 个极值点

12. 已知抛物线 $\Gamma: y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点为 F,准线为 l. A 是 Γ 上除坐标原点 O 以外的动点,过点 A 且与 Γ 相切的直线 m 与 y 轴交于点 B,与 x 轴交于点 C,$AD\perp l$,垂足为 D,则下列说法正确的是

A. $|FA|+|AD|$ 的最小值为 2

B. 若点 B 落在 l 上,则 A 的横坐标为 2

C. 四边形 $AFBD$ 为菱形

D. $|OB|,|BC|,|BD|$ 成等比数列

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$,数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,则 $S_{21}=$__________.

14. 若正数 a,b 满足 $a^2+2b=ab^2$,则 b 的最小值是__________.

15. 古希腊著名数学家阿波罗尼斯发现了平面内到两个定点的距离之比为定值 $\lambda(\lambda\neq 1)$ 的点的轨迹是圆,此圆被称为“阿波罗尼斯圆”. 已知 $P(0,4)$,Q 为直线 $y=x-3$ 上的动点,R 为圆 $O: x^2+y^2=4$ 上的动点,则 $|RQ|+\frac{1}{2}|PR|$ 的最小值为__________.

16. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2,M 为棱 CC_1 的中点,P,Q 分别为线段 AC_1,BM 上的动点,则 PQ 的最小值为__________.

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知在等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_3=7$,$a_5+a_6=29$.

(Ⅰ)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ)若 $\{b_n+a_n\}$ 是等比数列,且 $b_1=0$,$b_2=-2$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中,$\sin B\sin C+\sin^2 C=\cos^2 B-\cos^2 A$.

(Ⅰ)求 A;

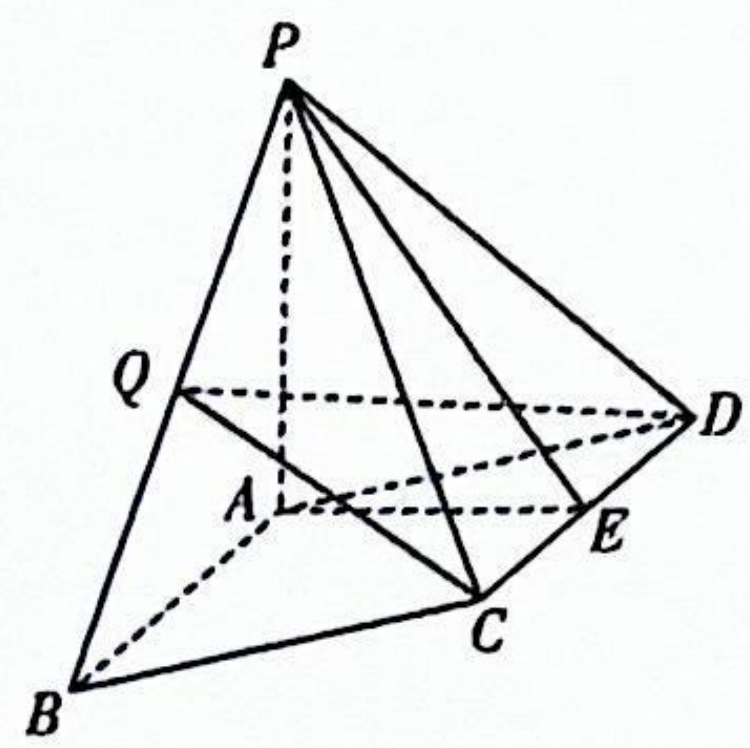
(Ⅱ)若 $AB=2AC=4$,点 D 在边 BC 上,AD 平分 $\angle BAC$,求 AD 的长.

19. (12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为菱形,$\angle BAD=\frac{2\pi}{3}$,$PA\perp$ 平面 $ABCD$,$PA=AD$,E 为棱 CD 的中点,点 Q 在棱 PB 上.

(Ⅰ)证明:平面 $QCD\perp$ 平面 PAE;

(Ⅱ)若 Q 为 PB 的中点,求直线 PE 与平面 QCD 所成角的正弦值.



20. (12 分)

一只 LED 灯能闪烁红、黄、蓝三种颜色的光,受智能程序控制每隔 1 秒闪一次光,相邻两次闪光的颜色不相同. 若某次闪红光,则下次有$\frac{1}{2}$的概率闪黄光;若某次闪黄光,则下次有$\frac{3}{4}$的概率闪蓝光;若某次闪蓝光,则下次有$\frac{1}{4}$的概率闪红光. 已知第 1 次闪光为红光.

(Ⅰ)求第 4 次闪光为红光的概率;

(Ⅱ)求第 n 次闪光为红光的概率.

21. (12 分)

已知双曲线 E 是关于 x 轴和 y 轴均对称的等轴双曲线,且经过点$(4,2\sqrt{3})$.

(Ⅰ)求 E 的方程;

(Ⅱ)若 $A(m,n)$是 E 上一动点,直线 $mx-ny=8$ 与 E 交于 B,C 两点,证明:$\triangle ABC$ 的面积为定值.

22. (12 分)

已知函数 $f(x)=x-\sin\frac{\pi x}{2}$.

(Ⅰ)设 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$且 $\cos\theta=\frac{2}{\pi}$,求 $f(x)$在区间$(-1,1)$内的单调递减区间(用 θ 表示);

(Ⅱ)若 $a>0$,函数 $g(x)=f(x)-a\ln|x|$有且仅有 2 个零点,求 a 的值.