湖南师大附中2024届高三月考试卷(六)

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	D	A	C	D	C	C	A	C	BCD	ABD	AC

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. D 【解析】因为集合 $A=\{2,3,5\}$,$B=\{1,4,5,7\}$,故 $A\cap B=\{5\}$,A错误;

由于 $2\in A,3\in A$,但 $2\notin B,3\notin B$,故 A 不是 B 的子集,B错误,

$A\cup B=\{2,3,1,4,5,7\}\neq A$,C错误;

$5\in A\cup B=\{2,3,1,4,5,7\}$,D正确,故选:D.

2. A 【解析】由 $z(2+i^7)=3i^{27}+4i^{28}$,得 $z(2-i)=4-3i$,

所以 $z=\frac{4-3i}{2-i}=\frac{(4-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{11}{5}-\frac{2}{5}i$,所以 $\bar{z}=\frac{11}{5}+\frac{2}{5}i$,

所以 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点为 $\left(\frac{11}{5},\frac{2}{5}\right)$,位于第一象限.故选:A.

3. C 【解析】因为命题"$\exists x\in[1,3]$,$x^2-a>0$"为假命题,所以命题"$\forall x\in[1,3]$,$x^2-a\leqslant 0$"为真命题,即 $a\geqslant x^2$ 对 $\forall x\in[1,3]$ 恒成立,所以 $a\geqslant(x^2)_{\max}=9$,因为 $[10,+\infty)\subsetneqq[9,+\infty)$,

所以命题"$\exists x\in[1,3]$,$x^2-a>0$"为假命题的一个充分不必要条件是 $a\geqslant 10$.故选:C.

4. D 【解析】由题意得,$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 上的投影为 $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=|\boldsymbol{a}|\times\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}$,同理,$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 上的投影为 $\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}$,因为任意非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 上的投影向量互为相反向量,所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 上的投影互为相反数,所以 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}+\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=0$,则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$,即 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$.故选:D.

5. C 【解析】由三角函数的定义可知,$\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,得 $t=2$,所以角 α 终边上一点为 $(-1,2)$,$\tan\alpha=\frac{2}{-1}=-2$,$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=3$.故选:C.

6. C 【解析】因为 $2^x=4^y+\sqrt{2}$,

所以 $4^{x-y}=\frac{2^{2x}}{4^y}=\frac{(4^y+\sqrt{2})^2}{4^y}=\frac{4^{2y}+2\sqrt{2}\cdot 4^y+2}{4^y}=4^y+\frac{2}{4^y}+2\sqrt{2}$.

因为 $4^y>0$,所以 $4^y+\frac{2}{4^y}\geqslant 2\sqrt{4^y\times\frac{2}{4^y}}=2\sqrt{2}$.

所以 $4^{x-y}\geqslant 4\sqrt{2}=4^{\frac{5}{4}}$,即 $x-y\geqslant\frac{5}{4}$.

当且仅当 $4^y=\frac{2}{4^y}$,$2^x=4^y+\sqrt{2}$,即 $y=\frac{1}{4}$,$x=\frac{3}{2}$ 时等号成立,

所以 $x-y$ 的最小值为 $\frac{5}{4}$.故选:C.

7. A 【解析】由题意知 $k_{CM}=-1$,又 $C(-10,3)$,

∴直线 CM 的方程为 $y-3=-(x+10)$,即 $x+y+7=0$.

由 $\begin{cases}x+y+7=0,\\(x+10)^2+(y-3)^2=128,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-2,\\y=-5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-18,\\y=11,\end{cases}$

即 $M(-2,-5)$ 或 $M(-18,11)$.又 M 为靠近 y 轴的切点,∴$M(-2,-5)$.

设飞行轨迹的抛物线方程为 $y=ax^2+c(a\neq 0)$,则 $y'=2ax$,∵在点 M 处的切线斜率为1,∴$-4a=1$,解得 $a=-\frac{1}{4}$.

$\therefore -5=-\frac{1}{4}\times 4+c$，解得 $c=-4$，$\therefore y=-\frac{1}{4}x^2-4$，

即抛物线方程为 $x^2=-4(y+4)$．故选：A．

8．C 【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，则 $q\neq 0$，

由 $-a_1<a_1$ 可得 $a_1>0$，又 $a_2<a_1$，所以$\frac{a_2}{a_1}<1$ 即 $q<1$，又 $-a_1<a_2$，所以 $-a_1<a_1q$，即 $q>-1$，

故等比数列$\{a_n\}$首项 $a_1>0$，公比 q 满足 $-1<q<0$ 或 $0<q<1$．

当 $-1<q<0$ 时，等比数列$\{a_n\}$为正负项交替的摆动数列，故不单调；

当 $0<q<1$ 时，$a_{n+1}-a_n=a_1q^{n-1}(q-1)<0$，等比数列$\{a_n\}$单调递减，故 A，B 不正确；

又 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}(1-q^n)$，且$\frac{a_1}{1-q}>0$，

所以当 $-1<q<0$ 时，由于 $S_{n+2}-S_n=\frac{a_1}{1-q}(q^n-q^{n+2})=\frac{a_1}{1-q}q^n(1-q^2)$，

则 $S_1=a_1>S_3>S_5>\cdots>\frac{a_1}{1-q}$，$\frac{a_1}{1-q}>\cdots>S_6>S_4>S_2=a_1+a_2>0$，

此时数列$\{S_n\}$的最小项为 S_2，最大项为 S_1；

当 $0<q<1$ 时，有 $S_{n+1}-S_n=\frac{a_1}{1-q}(q^n-q^{n+1})=\frac{a_1}{1-q}q^n(1-q)=a_1q^n>0$，

则数列$\{S_n\}$为单调递增数列，有最小项 S_1，无最大项，故 C 正确，D 不正确．

故选：C．

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．BCD 【解析】因为 $10\times 60\%=6$，所以第 60 百分位数为$\frac{14+16}{2}=15$，A 错误；

若随机变量 X 服从正态分布 $X(3,\sigma^2)$，且 $P(X\leqslant 4)=0.7$，

则 $P(X>4)=1-P(X\leqslant 4)=0.3$，

则 $P(3<X<4)=0.5-P(X>4)=0.2$，B 正确；

若线性相关系数$|r|$越接近 1，

则两个变量的线性相关性越强，C 正确；

对于 D，样本点的中心为$(\bar{x},\bar{y})$，所以 $\bar{x}=m$，$\bar{y}=2.8$，而对于回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，

因为此时线性回归方程为 $\hat{y}=0.3x-m$，所以 $\hat{b}=0.3$，$2.8=0.3m-m$，所以 $m=-4$，D 正确．故选：BCD．

10．ABD 【解析】对于 A，令 $x_2=-x_1$，则 $|f(x_1)+f(-x_1)|\geqslant|g(x_1)+g(-x_1)|$，

因为 $f(x)$为奇函数，所以$|f(x_1)+f(-x_1)|\geqslant|g(x_1)+g(-x_1)|$恒成立等价于 $0\geqslant|g(x_1)+g(-x_1)|$，

因此 $g(x_1)+g(-x_1)=0$，即 $g(-x_1)=-g(x_1)$，可知 $g(x)$也是奇函数，所以 A 正确；

对于 B，设 $x_2>x_1$，因为函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $f(x_1)<f(x_2)$，

因为$|f(x_1)-f(x_2)|>|g(x_1)-g(x_2)|$恒成立，所以 $f(x_1)-f(x_2)<g(x_1)-g(x_2)<f(x_2)-f(x_1)$；

从而 $f(x_1)+g(x_1)-[f(x_2)+g(x_2)]<0$．

令 $h(x)=f(x)+g(x)$，则 $h(x_1)-h(x_2)=f(x_1)+g(x_1)-[f(x_2)+g(x_2)]<0$，可得 $h(x_1)<h(x_2)$，

所以 $h(x)=f(x)+g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上也单调递增，B 正确．

对于 C，若 $a>1$，函数 $f(x)=\begin{cases}a^x,x\leqslant 1,\\a-x,x>1\end{cases}$在$[0,2]$上的最大值为 $f(1)=a$，最小值为 $f(0)=1$ 或 $f(2)=a-2$，

当 $a-1=\frac{5}{2}$时，解得 $a=\frac{7}{2}$，此时 $f(2)=\frac{3}{2}>1$，满足题意；

当 $a-(a-2)=\frac{5}{2}$时，无解，舍去；

若 $0<a<1$，当 $x\in[0,1]$时 $f(x)=a^x$ 是单调递减，当 $x\in(1,2]$时，$f(x)=-x+a$ 是单调递减，

因为 $f(0)=1>-1+a$，所以函数最大值为 $f(0)=1$，

而 $f(2)=-2+a<-1+a<a=f(1)$，所以函数最小值为 $f(2)=-2+a$．

因此 $1-(-2+a)=\frac{5}{2}$，解得 $a=\frac{1}{2}$，符合题意；

综上可知，实数 a 的取值集合为 $\left\{\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right\}$，可得 C 错误；

对于 D，由 $f(-x)+f(x)=2$ 可得函数 $f(x)$ 关于 $(0,1)$ 成中心对称；

而 $g(x)=\frac{x+1}{x}$ 也关于 $(0,1)$ 成中心对称；

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的交点关于 $(0,1)$ 成中心对称；

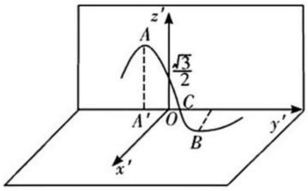
从而 $x_1+x_2+\cdots+x_8=0$，$y_1+y_2+\cdots+y_8=2\times4=8$，即 D 正确.

故选：ABD.

11. AC 【解析】函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$，

在图 2 中，以点 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{A'A}$ 的方向分别为 y'、z' 轴的正方向建立如下图所示的空间直角坐标系 $O-x'y'z'$，

设点 $A'(0,t,0)$，则点 $A(0,t,\lambda)$、$B(\lambda,t+2,0)$，



$|AB|=\sqrt{(0-\lambda)^2+(t+2-t)^2+(\lambda-0)^2}=\sqrt{2\lambda^2+4}=\sqrt{10}$，因为 $\lambda>0$，解得 $\lambda=\sqrt{3}$，故 A 正确；

所以，$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi x}{2}+\varphi\right)$，则 $f(0)=\sqrt{3}\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，

又因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近单调递减，且 $0<\varphi<\pi$，所以，$\varphi=\frac{5\pi}{6}$，故 B 错误；

因为 $f(t)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$，可得 $\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)=1$，

又因为点 A 是函数 $f(x)$ 的图象在 y 轴左侧距离 y 轴最近的最高点，则 $\frac{\pi t}{2}+\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，可得 $t=-\frac{2}{3}$，

所以，$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)$，

因为点 C 是函数 $f(x)$ 在 y 轴右侧的第一个对称中心，所以，$\frac{\pi x_C}{2}+\frac{5\pi}{6}=\pi$，可得 $x_C=\frac{1}{3}$，

翻折后，则有 $A\left(0,-\frac{2}{3},\sqrt{3}\right)$、$B\left(\sqrt{3},\frac{4}{3},0\right)$、$C\left(0,\frac{1}{3},0\right)$、$A'\left(0,-\frac{2}{3},0\right)$，

所以，$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{3},2,-\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(0,1,-\sqrt{3})$，

所以，在图 2 中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0+2\times1+(-\sqrt{3})^2=5$，故 C 正确；

在图 2 中，设点 $Q(x,y,0)$，$|AQ|=\sqrt{x^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2+\left(0-\sqrt{3}\right)^2}\leqslant2$，

可得 $x^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2\leqslant1$，

$\overrightarrow{A'C}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{A'B}=\left(\sqrt{3},2,0\right)$，$\cos\angle BA'C=\frac{\overrightarrow{A'C}\cdot\overrightarrow{A'B}}{|\overrightarrow{A'C}|\cdot|\overrightarrow{A'B}|}=\frac{2}{1\times\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}>\frac{\sqrt{2}}{2}$，

易知 $\angle BA'C$ 为锐角，则 $0<\angle BA'C<\frac{\pi}{4}$，

所以，区域 T 是坐标平面 $x'Oy'$ 内以点 A' 为圆心，半径为 $|A'C|=1$，且圆心角为 $\angle BA'C$ 的扇形及其内部，

故区域 T 的面积 $S_T<\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}\times1^2=\frac{\pi}{8}$，故 D 错误.

故选：AC.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

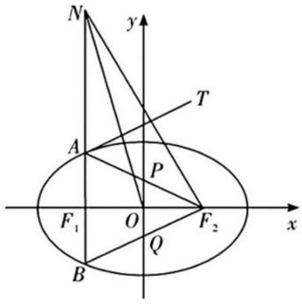
12. 120 【解析】由于 $x^5y^2=(x^2)^2\cdot x\cdot y^2$，

所以 $(2x^2+x-y)^5$ 的展开式中含 x^5y^2 的项为 $C_5^2(2x^2)^2\times C_3^1x\times(-y)^2=120x^5y^2$，

所以 $(2x^2+x-y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数为 120.

故答案为：120.

13. $\sqrt{37}$ 【解析】由题意知过点 F_1 且垂直于 x 轴的直线与椭圆交于 A，B 两点，



则 $|AF_1|+|AF_2|=2a$，$|BF_1|+|BF_2|=2a$，

故 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=4a$，

由于 $AB/\!/PQ$，且 O 是 F_1F_2 的中点，O 在 PQ 上，则 PQ 为 $\triangle ABF_2$ 的中位线，

则 $\triangle PQF_2$ 的周长为 $\triangle ABF_2$ 周长的一半，而 $\triangle PQF_2$ 的周长为 6，

即 $2a=6$，$\therefore a=3$，则椭圆方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$，

则 $|OF_1|=\sqrt{9-8}=1$，

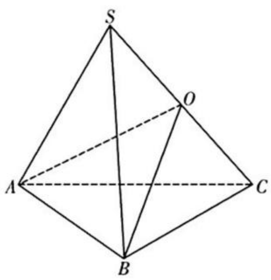
设 $\angle F_2AF_1$ 外角平分线为 AT，又过 F_2 作 $\angle F_2AF_1$ 外角平分线 AT 的垂线与直线 BA 交于点 N，

故 $|AN|=|AF_2|$，则 $|F_1N|=|AF_1|+|AN|=|AF_1|+|AF_2|=2a=6$，

故 $|ON|=\sqrt{|F_1N|^2+|OF_1|^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}$.

故答案为：$\sqrt{37}$.

14. $\frac{32\pi}{3}$ 【解析】取 SC 的中点 O，连接 OA、OB，如下图所示：



$\because SA=AC$，$SB=BC$，且 $SA\perp AC$，$SB\perp BC$，

$\therefore\triangle SAC$、$\triangle SBC$ 均为等腰直角三角形，且 $\angle SAC=\angle SBC=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore OA=OB=\frac{1}{2}SC=OC=OS$，$\therefore SC$ 为三棱锥 $S-ABC$ 的外接球直径.

设 $SC=2r$，可得 $OA=OB=r$，设 $\angle AOB=\theta$，

$\because SA=AC$，O 为 SC 的中点，则 $OA\perp SC$，同理可得 $OB\perp SC$，

$\because OA\cap OB=O$，OA，$OB\subset$ 平面 OAB，$\therefore SC\perp$ 平面 OAB，

$\therefore V_{S\text{-}ABC}=V_{S\text{-}OAB}+V_{C\text{-}OAB}=\frac{1}{3}SO\cdot S_{\triangle OAB}+\frac{1}{3}OC\cdot S_{\triangle OAB}=\frac{1}{3}SC\cdot S_{\triangle OAB}=\frac{1}{3}\times 2r\times\frac{1}{2}r^2\sin\theta=\frac{1}{3}r^3\sin\theta=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$\therefore\sin\theta$ $=\frac{4\sqrt{3}}{r^3}$，

在△OAB 中，由余弦定理可得 $AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\theta$，即 $2r^2-2r^2\cos\theta=12$，可得 $\cos\theta=\frac{r^2-6}{r^2}$，

由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，可得 $\frac{48}{r^6}+\left(\frac{r^2-6}{r^2}\right)^2=1$，化简可得 $r^4-3r^2-4=0$，

即 $(r^2+1)(r^2-4)=0$，

∵$r>0$，解得 $r=2$，

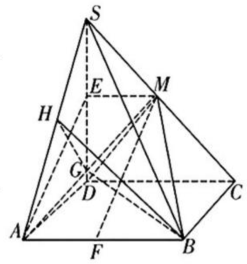
因此，三棱锥 $S-ABC$ 外接球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times2^3=\frac{32\pi}{3}$.

故答案为：$\frac{32\pi}{3}$.

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.**【解析】**(1)证明：作 $ME/\!/CD$ 交 SD 于点 E，则 $ME/\!/AB$，$ME\perp$平面 SAD，

连接 AE，则四边形 $ABME$ 为直角梯形，



作 $MF\perp AB$，垂足为 F，则 $AFME$ 为矩形， ………………………… 2 分

设 $ME=x$，则 $SE=x$，$AE=\sqrt{ED^2+AD^2}=\sqrt{(2-x)^2+2}$，

$MF=AE=\sqrt{(2-x)^2+2}$，$FB=2-x$，

由 $MF=FB\cdot\tan60°$，得 $\sqrt{(2-x)^2+2}=\sqrt{3}(2-x)$， ………………………… 4 分

解得 $x=1$，即 $ME=1$，

从而 $ME=\frac{1}{2}DC$，

∴M 为侧棱 SC 的中点. ………………………… 6 分

(2)**解法一**：$MB=\sqrt{BC^2+MC^2}=2$，

又∠$ABM=60°$，$AB=2$，∴△ABM 为等边三角形.

又由(1)知 M 为 SC 中点，$SM=\sqrt{2}$，$SA=\sqrt{6}$，$AM=2$，

∴$SA^2=SM^2+AM^2$，∠$SMA=90°$， ………………………… 8 分

取 AM 中点 G，连结 BG，取 SA 中点 H，连结 GH，

则 $BG\perp AM$，$GH\perp AM$，

由此知∠BGH 为二面角 $S-AM-B$ 的平面角， ………………………… 10 分

连结 BH，在△BGH 中，

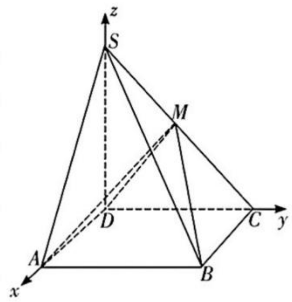
$BG=\frac{\sqrt{3}}{2}AM=\sqrt{3}$，$GH=\frac{1}{2}SM=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$BH=\sqrt{AB^2+AH^2}=\frac{\sqrt{22}}{2}$，

∴$\cos\angle BGH=\frac{BG^2+GH^2-BH^2}{2BG\cdot GH}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$. ………………………… 12 分

二面角 $S-AM-B$ 的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………… 13 分

解法二：以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DS}$方向为 x，y，z 轴正方向建立空间直角坐标系(如图)，…

………………………… 7 分



易知 $A(\sqrt{2},0,0)$，$B(\sqrt{2},2,0)$，$S(0,0,2)$，$M(0,1,1)$， ………………………… 8 分

$\overrightarrow{AM}=(-\sqrt{2},1,1)$，$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AS}=(-\sqrt{2},0,2)$， ………………………… 9 分

令平面 SAM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{AS}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\sqrt{2}x+2z=0,\\-\sqrt{2}x+y+z=0,\end{cases}$令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=$

$(\sqrt{2},1,1)$. ………………………… 10 分

同理可得，平面 AMB 的法向量 $\boldsymbol{m}=(1,0,\sqrt{2})$. ………………………… 11 分

令二面角 $S-AM-B$ 的大小为 θ，则 $|\cos\theta|=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$， ………………………… 12 分

∴所求为 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………… 13 分

16.【解析】(1)零假设 H_0:假设跳水员的优秀情况与训练无关.

列联表为:

	优秀人数	非优秀人数	合计
训练前	2	8	10
训练后	8	2	10
合计	10	10	20

……… 2分

$\chi^2=\dfrac{20\times(4-64)^2}{10\times10\times10\times10}=\dfrac{36}{5}=7.2>6.635$, …………………………………………………… 4分

故根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,零假设不成立,即跳水员的优秀情况与训练有关,此推断犯错误的概率不超过 0.01.

……… 5分

(2)由图可知:训练前后均不优秀的有 C,F 共 2 人,训练前后均优秀的有 D,G 共 2 人,训练前不优秀而训练后优秀的有 6 人,

设 A="所选 3 人中恰有 2 人训练后为优秀",B="所选 3 人中恰有 1 人训练前为优秀",

则 $P(A\cdot B)=\dfrac{C_2^1\cdot C_6^1\cdot C_2^1}{C_{10}^3}$,$P(A)=\dfrac{C_8^2\cdot C_2^1}{C_{10}^3}$,$\therefore P(B|A)=\dfrac{C_2^1\cdot C_6^1\cdot C_2^1}{C_8^2\cdot C_2^1}=\dfrac{3}{7}$. ……………………………………………… 10分

(3)设跳水员 A 每轮测试为优秀的概率为 p,则 $p=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+C_3^2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{27}$.

设 A 测试次数为 n,则优秀的次数 $X\sim B(n,p)$,

故 $E(X)=\dfrac{7n}{27}\geqslant3\Rightarrow n\geqslant\dfrac{81}{7}\approx11.6$,故至少需进行 12 轮测试. ……………………………………… 15分

17.【解析】(1)因为四个点中有三点在椭圆上,由椭圆的对称性可知:$(3,-1)$,$(-3,1)$必在椭圆上.若$(-2\sqrt{2},0)$在椭圆上,则为椭圆的左顶点.但$-3<-2\sqrt{2}$,所以与$(-3,1)$在椭圆上矛盾.$\therefore(-\sqrt{3},\sqrt{3})$在椭圆上, ……………………… 2分

$\therefore\begin{cases}\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\\ \dfrac{3}{a^2}+\dfrac{3}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=12,\\ b^2=4,\end{cases}$ $\therefore$椭圆方程为$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$. …………………………………………………… 5分

(2)依题意可得 $m=-2\sqrt{2}$,l 方程为:$x=-2\sqrt{2}$.

$\because|PM|=|PN|$且 P,M,N 共线,$\therefore P$ 为 MN 中点,$\therefore P$ 在椭圆内部.设 $P(-2\sqrt{2},y_0)$, ……………………… 7分

因为 $x=-2\sqrt{2}$ 与椭圆交于$\left(-2\sqrt{2},-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$,$\left(-2\sqrt{2},\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$,$\therefore y_0\in\left(-\dfrac{2}{3}\sqrt{3},\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$.

$\because P$ 为 MN 中点,且 $l'\perp MN$ 于 P,$\therefore l'$ 为 MN 的中垂线.设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{12}+\dfrac{y_1^2}{4}=1\\ \dfrac{x_2^2}{12}+\dfrac{y_2^2}{4}=1\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{12}(x_1^2-x_2^2)+\dfrac{1}{4}(y_1^2-y_2^2)=0$, ………………………………………………… 9分

$\therefore(x_1-x_2)(x_1+x_2)+3(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$.

$\because P$ 为 MN 中点,$\therefore x_1+x_2=-4\sqrt{2}$,$y_1+y_2=2y_0$,

当 $y_0\neq0$ 时,$\therefore k_{MN}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{x_1+x_2}{3(y_1+y_2)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3y_0}$. ………………………………………………… 12分

$\because l'\perp MN$,$\therefore l':y-y_0=-\dfrac{3y_0}{2\sqrt{2}}(x+2\sqrt{2})\Rightarrow y=-\dfrac{3y_0}{2\sqrt{2}}\left(x+\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$,

$\therefore l'$恒过$\left(-\dfrac{4\sqrt{2}}{3},0\right)$,

当 $y_0=0$ 时,直线 MN:$x=-2\sqrt{2}$,$\therefore l'$ 为 x 轴,过$\left(-\dfrac{4\sqrt{2}}{3},0\right)$.

$\therefore$无论 P 位于哪个位置,直线 l' 恒过$\left(-\dfrac{4\sqrt{2}}{3},0\right)$. …………………………………………………… 15分

18.【解析】(1)若 $f(x)$ 是增函数,则 $f'(x)=\dfrac{k}{x}-\dfrac{1}{e^x}\geqslant0$,且 $x>0$,可得 $k\geqslant\dfrac{x}{e^x}$, ……………………………… 3分

故原题意等价于 $k\geqslant\frac{x}{e^x}$ 对 $\forall x>0$ 恒成立，

构建 $\varphi(x)=\frac{x}{e^x}(x>0)$，则 $\varphi'(x)=\frac{1-x}{e^x}(x>0)$，

令 $\varphi'(x)>0$，解得 $0<x<1$；令 $\varphi'(x)<0$，解得 $x>1$；

则 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，在 $(1,+\infty)$ 上递减，故 $\varphi(x)\leqslant\varphi(1)=\frac{1}{e}$，

$\therefore k$ 的取值范围为 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$. ………………………… 5 分

(2)(ⅰ)由(1)可知：当 $k=\frac{1}{e}$ 时，$f(x)=\frac{\ln x}{e}+\frac{1}{e^x}$ 单调递增，

$\because 0<x_1<x_2$，则 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $\frac{1}{e}\ln x_2+\frac{1}{e^{x_2}}>\frac{1}{e}\ln x_1+\frac{1}{e^{x_1}}$，

整理得 $\frac{e}{e^{x_2}}-\frac{e}{e^{x_1}}>\ln x_1-\ln x_2=-\ln\frac{x_2}{x_1}$， ………………………… 7 分

构建 $g(x)=x-\ln x-1$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}(x>0)$， ………………………… 9 分

令 $g'(x)<0$，解得 $0<x<1$；令 $g'(x)>0$，解得 $x>1$；

则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，

故 $g(x)=x-\ln x-1\geqslant g(1)=0$，即 $-\ln x\geqslant 1-x$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，………………………… 10 分

令 $x=\frac{x_2}{x_1}>1$，可得 $-\ln\frac{x_2}{x_1}>1-\frac{x_2}{x_1}$，故 $\frac{e}{e^{x_2}}-\frac{e}{e^{x_1}}>1-\frac{x_2}{x_1}$； ………………………… 11 分

(ⅱ) $\because\frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{x_2}{e^{x_2}}=k$，则 $\frac{k}{x_1}-\frac{1}{e^{x_1}}=\frac{k}{x_2}-\frac{1}{e^{x_2}}=0$，

可知 $f'(x)=\frac{k}{x}-\frac{1}{e^x}=0$ 有两个不同实数根 x_1,x_2，由(1)知 $0<x_1<1<x_2$，

可得 $f(x_1)=k\ln x_1+\frac{1}{e^{x_1}}=\frac{x_1}{e^{x_1}}\ln x_1+\frac{1}{e^{x_1}}=\frac{x_1\ln x_1+1}{e^{x_1}}$， ………………………… 12 分

同理可得 $f(x_2)=\frac{x_2\ln x_2+1}{e^{x_2}}$，构建 $g(x)=\frac{x\ln x+1}{e^x}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{(1-x)\ln x}{e^x}(x>0)$，

当 $0<x<1$ 时，$(1-x)\ln x<0$；当 $x>1$ 时，$(1-x)\ln x<0$；当 $x=1$ 时，$(1-x)\ln x=0$；

且 $e^x>0$，故 $g'(x)\leqslant 0$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

$\because 0<x_1<1<x_2$，则 $g(x_2)<g(1)<g(x_1)$，即 $f(x_2)<\frac{1}{e}<f(x_1)$， ………………………… 14 分

且 $\ln x_2>0$，$e^{x_2}>0$，则 $x_2\ln x_2+1>0$，故 $g(x_2)=\frac{x_2\ln x_2+1}{e^{x_2}}>0$，可得 $0<f(x_2)<\frac{1}{e}$； ………………………… 15 分

又 $\because 0<x_1<1$，由(i)可得 $-\ln x_1>1-x_1$，即 $\ln x_1<x_1-1$，

则 $x_1\ln x_1+1<x_1(x_1-1)+1<1<e^{x_1}$，故 $\frac{x_1\ln x_1+1}{e^{x_1}}<1$，可得 $\frac{1}{e}<f(x_1)<1$； ………………………… 16 分

故 $|f(x_1)-f(x_2)|=f(x_1)-f(x_2)<1$. ………………………… 17 分

19.**【解析】**(1)取 $\{a_n\}$ 为 4,6,9；$\{b_n\}$ 为 1,3,5,7，

则 $\{a_n\}$ 满足：$\frac{6}{4}=\frac{9}{6}$，故 4,6,9 为等比数列.

而 $3-1=5-3=7-5=2$，故 1,3,5,7 为等差数列，

故此时 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 符合题意. ………………………… 4 分

(2)因为集合 C 中的所有元素按从小到大排列构成首项为 1 的数列 $\{c_n\}$，

故 $\{c_n\}$ 中各项均为正数，所以 $\{b_n\}$ 中的各项均为正数，

而 $\{b_n\}$ 为无穷等差数列，故 $d>0$.

设 $\{c_n\}$ 的前 5 项为：$1,p,p^2,p^3,p^4(p>1)$， ………………………… 5 分

因为 $b_1<a_5$，$a_1=c_1=1$，$A\cap B=\varnothing$，所以 $b_1\in\{p,p^2,p^3,p^4\}$，此时必有 $c_2=b_1=p$，

事实上，若 $c_2=a_2$，则 $\{c_n\}$ 的前 5 项即是 $\{a_n\}$ 的前 5 项，与 $b_1\in\{p,p^2,p^3,p^4\}$ 矛盾. ………………………… 7 分

所以 $c_3=a_2$ 或 $c_3=b_2$.

若 $c_3=a_2$，则 $p^2=2$，所以 $p=\sqrt{2}$，此时 $\{c_n\}$ 的前 5 项为 $1,\sqrt{2},2,2\sqrt{2},4$，

即 $b_1=\sqrt{2}$，$b_2=2\sqrt{2}$，所以数列 $\{b_n\}$ 的公差为 $d=b_2-b_1=\sqrt{2}$，

因为 $b_3=3\sqrt{2}>a_2$，所以 $p=\sqrt{2}$ 符合题意；……………… 9 分

若 $c_3=b_2$，则 $c_4=b_3$ 或 $c_4=a_2$；

①$c_4=b_3$ 时，有 p,p^2,p^3 成等差数列，所以 $2p^2=p+p^3$，解得 $p=1$，与 $p>1$ 矛盾；

②$c_4=a_2$ 时，有 $p^3=2$，所以 $p=\sqrt[3]{2}$，所以 $\{c_n\}$ 的前 5 项为 $1,\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4},2,2\sqrt[3]{2}$，

因为 $2\sqrt[3]{2}\notin A$，所以 $2\sqrt[3]{2}\in B$，即 $b_3=2\sqrt[3]{2}$，

所以 $b_1+b_3=\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}$，$2b_2=2\sqrt[3]{4}$，故 $b_1+b_3\neq 2b_2$，与 $\{b_n\}$ 为等差数列矛盾.

所以 $c_3=b_2$ 不可能.

综上，p 的值为 $\sqrt{2}$. ……………… 11 分

(3) 因为数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1 的无穷数列，由 (2) 知，数列 $\{b_n\}$ 是递增的数列；

对于公比不为 1 的无穷数列 $\{a_n\}$，必有 $a_1\geqslant 1,q>1$. ……………… 12 分

否则，若 q 为负，则 $\{a_n\}$ 相邻两项必有一项为负，

这与 $\{c_n\}$ 中的最小项为 $c_1=1$ 矛盾；

若 $0<q<1$，则当 $n>1-\dfrac{\ln a_1}{\ln q}$ 时，$a_1q^{n-1}<a_1q^{1-\frac{\ln a_1}{\ln q}-1}=1$，

即 $a_n<1$，这与 $\{c_n\}$ 中的最小项为 $c_1=1$ 矛盾. ……………… 13 分

先证明充分性：

当 d 是正有理数时，因为数列 $\{b_n\}$ 是递增的等差数列，所以 $d>0$，

设 $d=\dfrac{s}{t}$ $(s,t\in\mathbf{N}^*$，s,t 互质)，则 $s=td$，

令 $a_n=(1+s)^{n-1}$，则 $a_1=1$，$a_2=1+s=1+td=b_{t+1}$，

当 $n\geqslant 3$ 时，

$a_n=1+C_{n-1}^1s+C_{n-1}^2s^2+\cdots+C_{n-1}^rs^r+\cdots+C_{n-1}^{n-1}s^{n-1}$

$=1+(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2s+\cdots+C_{n-1}^rs^{r-1}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}s^{n-2})td$

所以数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项是数列 $\{b_n\}$ 的第 $(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2s+\cdots+C_{n-1}^rs^{r-1}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}s^{n-2})t+1$ 项，

所以数列 $\{a_n\}$ 中的项都是数列 $\{b_n\}$ 的项，即 $A\subseteq B$. ……………… 15 分

再证明必要性：

假设 d 是正无理数，因为 $A\subseteq B$，即数列 $\{a_n\}$ 中的项都是数列 $\{b_n\}$ 的项，故 $b_1=1$.

令 $a_1=b_{i+1}$，$a_2=b_{j+1}$，$a_3=b_{k+1}$ $(i,j,k\in\mathbf{N})$，则 $a_1=1+id$，$a_2=1+jd$，$a_3=1+kd$，且 $i<j<k$，

因为 $a_2^2=a_1a_3$，即 $(1+jd)^2=(1+id)(1+kd)$，

整理得：$2jd+j^2d^2=(i+k)d+ikd^2$，约去 d 有 $2j+j^2d=(i+k)+ikd$，

因为 $i,j,k\in\mathbf{N}$，且 d 是无理数，所以 $\begin{cases}2j=i+k,\\ j^2=ik,\end{cases}$ 消去 j 并整理得 $(i-k)^2=0$，

故 $i=k$，与 $i<j<k$ 矛盾，所以假设不成立，即 d 是有理数.

综上所述，"存在数列 $\{a_n\}$，使 $A\subseteq B$"的充要条件是"d 是正有理数". ……………… 17 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。