2024年1月“七省联考”押题预测卷01

数　学

（考试时间：120分钟　试卷满分：150分）

注意事项：

1．本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答第I卷时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3．回答第II卷时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

4．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．若集合 $A=\{x\mid x-2<0\}$，集合 $B=\{x\mid 2^x>1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$(2,+\infty)$　　B．$(0,2)$　　C．$(-\infty,2)$　　D．R

2．已知 i 是虚数单位，若非零复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=|z|^2$，则 $\dfrac{z}{1+\mathrm{i}}=$（　　）

A．1　　B．-1　　C．i　　D．$-\mathrm{i}$

3．江南的周庄、同里、角直、西塘、乌镇、南浔古镇，并称为“江南六大古镇”，是中国江南水乡风貌最具代表的城镇，它们以其深邃的历史文化底蕴、清丽婉约的水乡古镇风貌、古朴的吴侬软语民俗风情，在世界上独树一帜，驰名中外. 这六大古镇中，其中在苏州境内的有 3 处. 某家庭计划今年暑假从这 6 个古镇中挑选 2 个去旅游，则只选一个苏州古镇的概率为（　　）

A．$\dfrac{2}{5}$　　B．$\dfrac{3}{5}$　　C．$\dfrac{1}{5}$　　D．$\dfrac{4}{5}$

4．基础建设对社会经济效益产生巨大的作用，某市投入 a 亿元进行基础建设，t 年后产生 $f(t)=a\mathrm{e}^{\lambda t}$ 亿元社会经济效益．若该市投资基础建设 4 年后产生的社会经济效益是投资额的 2 倍，且再过 t 年，该项投资产生的社会经济效益是投资额的 8 倍，则 $t=$（　　）

A．4　　B．8　　C．12　　D．16

5．已知平面向量 $\vec{a},\vec{b}(\vec{a}\neq\vec{b})$ 满足 $|\vec{a}|=3$，且 $\vec{b}$ 与 $\vec{b}-\vec{a}$ 的夹角为 30°，则 $|\vec{b}|$ 的最大值为（　　）

A．2　　B．4

C．6　　D．8

6．设一组样本数据 x_1，x_2，…，x_n 的极差为 1，方差为 0.1，若数据 ax_1+b，ax_2+b，…，ax_n+b 的极差为 2，则数据 ax_1+b，ax_2+b，…，ax_n+b 的方差为（　　）

A．0.02　　B．0.04　　C．0.2　　D．0.4

7．在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=2$，$AC=4$，$\angle BAC=60^\circ$，BC，AC 边上的两条中线 AM，BN 相交于点 P，则 $\angle MPN$ 的余弦值是（　　）．

A. $\dfrac{1}{14}$　　B. $\dfrac{\sqrt{7}}{14}$　　C. $\dfrac{\sqrt{13}}{14}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$

8．已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\cos x-2$，设 $a=f\left(\log_2 0.2\right),b=f\left(\log_{0.3} 0.2\right),c=f\left(0.2^{0.3}\right)$，则（　　）

A. $a>c>b$　　B. $a>b>c$　　C. $c>b>a$　　D. $b>c>a$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．下列结论正确的是（　　）

A. 若随机变量 ξ，η 满足 $\eta=2\xi+1$，则 $D(\eta)=2D(\xi)+1$

B. 若随机变量 $\xi\sim N\left(3,\sigma^2\right)$，且 $P(\xi<6)=0.84$，则 $P(3<\xi<6)=0.34$

C. 若样本数据 $\left(x_{\mathrm{i}},y_{\mathrm{i}}\right)$（$i=1$，2，3，…，$n$）线性相关，则用最小二乘估计得到的经验回归直线经过该组数据的中心点 (x,y)

D. 根据分类变量 X 与 Y 的成对样本数据，计算得到 $\chi^2=4.712$．依据 $\alpha=0.05$ 的独立性检验（$x_{0.05}=3.841$），可判断 X 与 Y 有关

10．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，正项等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积为 T_n，则（　　）

A. 数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列　　B. 数列 $\left\{3^{a_n}\right\}$ 是等比数列

C. 数列 $\left\{\ln T_n\right\}$ 是等差数列　　D. 数列 $\left\{\dfrac{T_{n+2}}{T_n}\right\}$ 是等比数列

11．已知圆 O：$x^2+y^2=4$ 与圆 $C:x^2+y^2-2x+4y+4=0$ 相交于 A，B 两点，直线 $l:x-2y+5=0$，点 P 为直线 l 上一动点，过 P 作圆 O 的切线 PM，PN，（M，N 为切点），则说法正确的是（　　）

A. 直线 AB 的方程为 $x-2y+4=0$　　B. 线段 AB 的长为 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

C. 直线 MN 过定点 $\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{8}{5}\right)$　　D. $|PM|$ 的最小值是 2．

12．直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，所有棱长都相等，且 $\angle DAB=60^\circ$，M 为 BB_1 的中点，P 为四边形 BB_1C_1C 内一点（包括边界），下列结论正确的是（　　）

A. 平面 D_1AM 截四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面为直角梯形

B. $CB_1\perp$ 面 D_1AM

C. 平面 BB_1C_1C 内存在点 P，使得 $DP\perp AM$

D. $V_{A_1-AD_1M}:V_{C-AD_1M}=1:3$

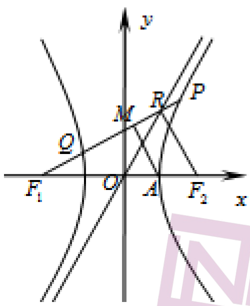
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．已知 $\left(2x^{-2}-x^3\right)^n$ 展开式的二项式系数之和为 256，则其展开式中 x^4 的系数为____________．（用数字作答）

14. 若函数 $f(x)=\sin x\cos x-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象在 $\left(\frac{\pi}{4},\theta\right)$ 内恰有 2 条对称轴，则 θ 的值可能为____________.

15. 甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为 $\frac{3\pi}{2}$，侧面积分别为 $S_{甲}$ 和 $S_{乙}$，体积分别为 $V_{甲}$ 和 $V_{乙}$. 若 $\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=2$，则 $\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=$__________.

16．如图，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的右顶点为 A，左右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 是双曲线右支上一点，PF_1 交左支于点 Q，交渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 于点 R,M 是 PQ 的中点，若 $RF_2\perp PF_1$，且 $AM\perp PF_1$，则双曲线的离心率是__________.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．已知 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$(a\cos C+c\cos A)\cos\frac{A}{2}=a\sin B$.

（1）求角 A；

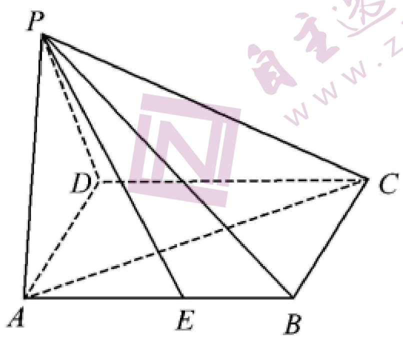
（2）若 D 为边 BC 上一点，且满足 $AD=CD$，$S_{\triangle ACD}=2S_{\triangle ABD}$，证明：$\triangle ABC$ 为直角三角形.

18．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n，数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是公差为 1 的等差数列.

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列；

（2）设数列 $\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项的和为 T_n，若 $S_3=9$，证明 $T_n<\frac{1}{2}$.

19．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，E 为棱 AB 的中点，$AC\perp PE$，$PA=PD$.



（1）证明：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$;

（2）若 $PA=AD$，$\angle BAD=60°$，求二面角 $E-PD-A$ 的正弦值.

20．设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2.A，B 是该椭圆 C 的右顶点和上顶点，且 $|AB|=\sqrt{5}$，若该椭圆的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程;

（2）直线 l 与椭圆 C 交于 P，Q 两点，且与 x 轴交于点 $D(x_D>a)$.若直线 PF_2 与直线 QF_2 的倾斜角互补，求 $\triangle PQF_2$ 的面积的最大值.

21．为不断改进劳动教育，进一步深化劳动教育改革，现从某单位全体员工中随机抽取 3 人做问卷调查. 已知某单位有 N 名员工，其中 $\frac{2}{5}$ 是男性，$\frac{3}{5}$ 是女性.

（1）当 $N=20$ 时，求出 3 人中男性员工人数 X 的分布列和数学期望；

（2）我们知道，当总量 N 足够大而抽出的个体足够小时，超几何分布近似为二项分布. 现在全市范围内考虑. 从 N 名员工（男女比例不变）中随机抽取 3 人，在超几何分布中男性员工恰有 2 人的概率记作 P_1；有二项分布中（即男性员工的人数 $X\sim B\left(3,\frac{2}{5}\right)$）男性员工恰有 2 人的概率记作 P_2.

那么当 N 至少为多少时，我们可以在误差不超过 0.001（即 $P_1-P_2\le 0.001$）的前提下认为超几何分布近似为二项分布.（参考数据：$\sqrt{578}\approx 24.04$）

22．已知函数 $f\left(x\right)=a\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$，（$a\in\mathrm{R}$）.

（1）若 $f\left(x\right)$ 为偶函数，求此时 $f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）设函数 $g(x)=f(x)-(a+1)x$，且存在 x_1,x_2 分别为 $g(x)$ 的极大值点和极小值点.

（ⅰ）求实数 a 的取值范围；

（ⅱ）若 $a\in(0,1)$，且 $g\left(x_1\right)+kg\left(x_2\right)>0$，求实数 k 的取值范围.