西安中学 2023-2024 学年度第一学期期中考试

高三数学(文科)答案

一、单选题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	C	C	B	B	D	A	B	B	A	A	D	A

二、填空题

13. 27 ； 14. 1610； 15. $(2-2\ln 2,3-2\ln 3]$.； 16. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

三、解答题

17.【答案】解：(1) 由题意，可得 $(a+b)(a-b)=(b+c)c$，

$\therefore b^2+c^2-a^2=-bc$，$\therefore \cos A=-\dfrac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\dfrac{2\pi}{3}$.

$(2)\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

$\overrightarrow{AD}^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{4}(AB^2+AC^2-AB\cdot AC)\geqslant\dfrac{1}{4}(2AB\cdot AC-AB\cdot AC)$

当且仅当 $AB=AC$ 时等号成立，$\therefore AB\cdot AC\leqslant 8$，

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin120°\leqslant\dfrac{1}{2}\times8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，故 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $2\sqrt{3}$.

18.【答案】解：(1) 由题中的数据可得，

$\bar{x}=\dfrac{1}{10}\times(9.8+10.3+10.0+10.2+9.9+9.8+10.0+10.1+10.2+9.7)=10$，

$\bar{y}=\dfrac{1}{10}\times(10.1+10.4+10.1+10.0+10.1+10.3+10.6+10.5+10.4+10.5)=10.3$，

$s_1^2=\dfrac{1}{10}\times[(9.8-10)^2+(10.3-10)^2+(10-10)^2+(10.2-10)^2+(9.9-10)^2+(9.8-10)^2$

$+(10-10)^2+(10.1-10)^2+(10.2-10)^2+(9.7-10)^2]=0.036$；

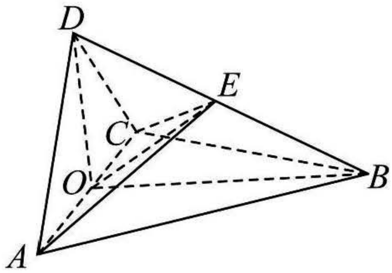
$s_2^2=\dfrac{1}{10}\times[(10.1-10.3)^2+(10.4-10.3)^2+(10.1-10.3)^2+(10.0-10.3)^2+(10.1-10.3)^2$

$+(10.3-10.3)^2+(10.6-10.3)^2+(10.5-10.3)^2+(10.4-10.3)^2+(10.5-10.3)^2]=0.04$；

(2) $\bar{y}-\bar{x}=10.3-10=0.3$，$2\sqrt{\dfrac{s_1^2+s_2^2}{10}}=2\sqrt{\dfrac{0.036+0.04}{10}}=2\sqrt{0.0076}\approx 0.174$，

所以 $\bar{y}-\bar{x}>2\sqrt{\dfrac{s_1^2+s_2^2}{10}}$，故新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高.

19.【答案】证明：(1) 取 AC 中点 O，连结 DO、BO，



$\because \triangle ABC$ 是正三角形，$AD=CD$，

$\therefore DO\perp AC$，$BO\perp AC$，

$\because DO\cap BO=O$，DO，$BO\subset$ 平面 BDO，

$\therefore AC\perp$ 平面 BDO，

$\because BD\subset$ 平面 BDO，$\therefore AC\perp BD$.

解：(2) 连结 OE，由 (1) 知 $AC\perp$ 平面 OBD，

$\because OE\subset$ 平面 OBD，$\therefore OE\perp AC$，$\therefore E$ 是线段 AC 垂直平分线上的点，

$\therefore EC=EA$，又 $\because AE\perp EC$，$\therefore \triangle AEC$ 为等腰直角三角形，

设 $AD=CD=\sqrt{2}$，则 $OC=OA=1$，$AC=2$，

$\therefore EC=EA=\sqrt{2}=CD$，

在 $\triangle BCD$ 与 $\triangle BCE$ 中，由余弦定理得：

$$\cos\angle CBD=\frac{BC^2+BD^2-CD^2}{2BC\cdot BD}=\frac{BC^2+BE^2-CE^2}{2BC\cdot BE},$$

即 $\dfrac{4+4-2}{2\times2\times2}=\dfrac{4+BE^2-2}{2\times2\times BE}$，解得 $BE=1$ 或 $BE=2$，

$\because BE<BD=2$，$\therefore BE=1$，$\therefore BE=ED$，

$\because$ 三棱锥 $A-BCE$ 与三棱锥 $A-CDE$ 的高都是点 A 到平面 BCD 的距离，设为 h，

$\because BE=ED$，$\therefore S_{\triangle DCE}=S_{\triangle BCE}$，即 $\dfrac{V_{A-BCE}}{V_{A-DCE}}=\dfrac{\frac{1}{3}S_{\triangle BCE}\cdot h}{\frac{1}{3}S_{\triangle DCE}\cdot h}=1$，

$\therefore$四面体 $ABCE$ 与四面体 $ACDE$ 的体积比为1.

20.【答案】(1) 证明：当直线 l 的斜率不存在时，取 $A(2,2)$，则 $B(2,-2)$，

则 $\vec{OA}=(2,2)$，$\vec{OB}=(2,-2)$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，$\therefore\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，则坐标原点 O 在圆 M 上；

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程 $y=k(x-2)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=k(x-2)\\y^2=2x\end{cases}$，整理得：$k^2x^2-(4k^2+2)x+4k^2=0$，易知 $\Delta>0$ 恒成立，

则 $x_1x_2=4$，$4x_1x_2=y_1^2y_2^2=(y_1y_2)^2$，由 $y_1y_2<0$，得 $y_1y_2=-4$，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$，则 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，则坐标原点 O 在圆 M 上，

综上可知：坐标原点 O 在圆 M 上；

(2) 解：由题意，圆 M 过点 $P(4,-2)$，可知：直线 l 的斜率存在且不为 0，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 (1) 可知：$x_1x_2=4$，$x_1+x_2=\dfrac{4k^2+2}{k^2}$，$y_1+y_2=\dfrac{2}{k}$，$y_1y_2=-4$，

圆 M 过点 $P(4,-2)$，则 $\overrightarrow{AP}=(4-x_1,-2-y_1)$，$\overrightarrow{BP}=(4-x_2,-2-y_2)$，

由 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，则 $(4-x_1)(4-x_2)+(-2-y_1)(-2-y_2)=0$，

整理得：$k^2+k-2=0$，解得：$k=-2$ 或 $k=1$，

当 $k=-2$ 时，直线 l 的方程为 $y=-2x+4$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{9}{2}$，$y_1+y_2=-1$，

设圆 M 的圆心为 M 点，

则$M(\frac{9}{4},-\frac{1}{2})$，半径为$r=|MP|=\sqrt{(4-\frac{9}{4})^2+(-2+\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{85}}{4}$，

$\therefore$圆 M 的方程$(x-\frac{9}{4})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{85}{16}$；

当直线斜率$k=1$时，直线 l 的方程为$y=x-2$，

同理求得$M(3,1)$，则半径为$r=|MP|=\sqrt{10}$，

$\therefore$圆 M 的方程为$(x-3)^2+(y-1)^2=10$，

综上可知：直线 l 的方程为$y=-2x+4$，圆 M 的方程$(x-\frac{9}{4})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{85}{16}$，

或直线 l 的方程为$y=x-2$，圆 M 的方程为$(x-3)^2+(y-1)^2=10$.

21.【答案】解：(1)$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$m>0$，

$f'(x)=2mx^2-(m+2)x+1=(mx-1)(2x-1)$. 令$f'(x)=0$，得$x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{1}{m}$.

当$\frac{1}{m}<\frac{1}{2}$时，即$m>2$时，

令$f'(x)>0$，得$x<\frac{1}{m}$，或$x>\frac{1}{2}$；令$f'(x)<0$，得$\frac{1}{m}<x<\frac{1}{2}$，

故$f(x)$在区间$\left(-\infty,\frac{1}{m}\right)$上单调递增，在区间$\left(\frac{1}{m},\frac{1}{2}\right)$上单调递减，在区间$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增.

当$\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$时，即$m=2$时，$f'(x)\geqslant 0$恒成立，故$f(x)$在 R 上单调递增；

当$\frac{1}{m}>\frac{1}{2}$时，即$0<m<2$时，

令$f'(x)>0$，得$x<\frac{1}{2}$，或$x>\frac{1}{m}$；令$f'(x)<0$，得$\frac{1}{2}<x<\frac{1}{m}$，

故$f(x)$在区间$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$上单调递增，在区间$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{m}\right)$上单调递减，在区间$\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$上单调递增.

综上：当 $m>2$ 时，$f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,\frac{1}{m}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(\frac{1}{m},\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，

在区间 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增；

当 $m=2$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递增；

当 $0<m<2$ 时，$f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{m}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$ 上单调递增.

(2) 若存在 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，使得不等式 $g(x)=mx^2-(m+2)x+\ln x<-2$ 成立，

则 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 时，$g(x)_{\min}<-2$.

由题意得 $g'(x)=2mx-(m+2)+\frac{1}{x}=\frac{2mx^2-(m+2)x+1}{x}=\frac{(mx-1)(2x-1)}{x}$，

由 (1) 可知，当 $\frac{1}{m}\leqslant\frac{1}{2}$，即 $m\geqslant 2$ 时，函数 $g(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递增，

$g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}+\ln\frac{1}{2}<-2$，解得 $m>4(1-\ln 2)$，$\therefore m\geqslant 2$；

当 $\frac{1}{2}<\frac{1}{m}<1$，即 $1<m<2$ 时，

由 (1) 知 $g(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},\frac{1}{m}\right]$ 上单调递减，在区间 $\left[\frac{1}{m},1\right]$ 上单调递增，

$g(x)_{\min}=g(\frac{1}{m})=\frac{1}{m}-\frac{m+2}{m}+\ln\frac{1}{m}=-\frac{1}{m}+\ln\frac{1}{m}-1$，

令 $\frac{1}{m}=t\in(\frac{1}{2},1)$，$h(t)=-t+\ln t-1,(\frac{1}{2}<t<1)$，则 $h'(t)=-1+\frac{1}{t}>0$，

函数 $h(t)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增. $\therefore h(t)<h(1)=-2$ 恒成立，$\therefore 1<m<2$.

当 $\frac{1}{m}\geqslant 1$，即 $0<m\leqslant 1$ 时，函数 $g(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递减，

$g(x)_{\min}=g(1)=-2$，$g(x)_{\min}<-2$ 不成立.

综上所述，m 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

22.【答案】解：(1) 由 $\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})+m=0$ 可得，$\rho(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{3})+m=0$，

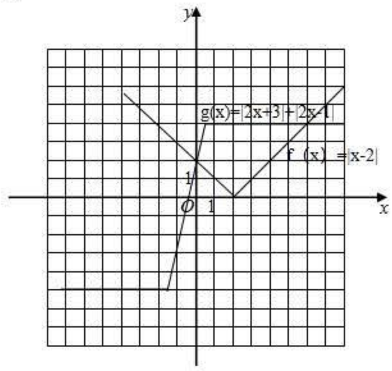
即 $\rho(\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)+m=0$，$\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+m=0$，故 l 的方程为：$\sqrt{3}x+y+2m=0$.

(2) 由 $x=\sqrt{3}\cos 2t$，得 $x=\sqrt{3}(1-2\sin^2 t)=\sqrt{3}\left[1-2\left(\dfrac{y}{2}\right)^2\right]=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y^2$，

联立 $\begin{cases}x=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y^2\\ \sqrt{3}x+y+2m=0\end{cases}$，$3y^2-2y-4m-6=0$，即 $3y^2-2y-6=4m(-2\leqslant y\leqslant 2)$，

即 $-\dfrac{19}{3}\leqslant 4m\leqslant 10$，$-\dfrac{19}{12}\leqslant m\leqslant\dfrac{5}{2}$，故 m 的范围是 $-\dfrac{19}{12}\leqslant m\leqslant\dfrac{5}{2}$.

23.【答案】解：(1) 函数 $f(x)=|x-2|=\begin{cases}x-2, x\geqslant 2\\ 2-x, x<2\end{cases}$，



$$g(x)=|2x+3|-|2x-1|=\begin{cases}4, x\geqslant\dfrac{1}{2}\\ 4x+2, -\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{1}{2}\\ -4, x\leqslant-\dfrac{3}{2}\end{cases}.$$

画出 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像；

(2) 由图像可得：$f(6)=4$，$g(\dfrac{1}{2})=4$，

若 $f(x+a)\geqslant g(x)$，说明把函数 $f(x)$ 的图像向左或向右平移 $|a|$ 单位以后，$f(x)$ 的图像不在 $g(x)$ 的下方，

由图像观察可得：$a \geqslant 2-\frac{1}{2}+4=\frac{11}{2}$

$\therefore a$ 的取值范围为 $[\frac{11}{2},+\infty)$.