合肥一中2024届高三上学期期末质量检测卷

数　学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数$\frac{3+ai}{2-i}$的实部与虚部相等，则实数a的值为

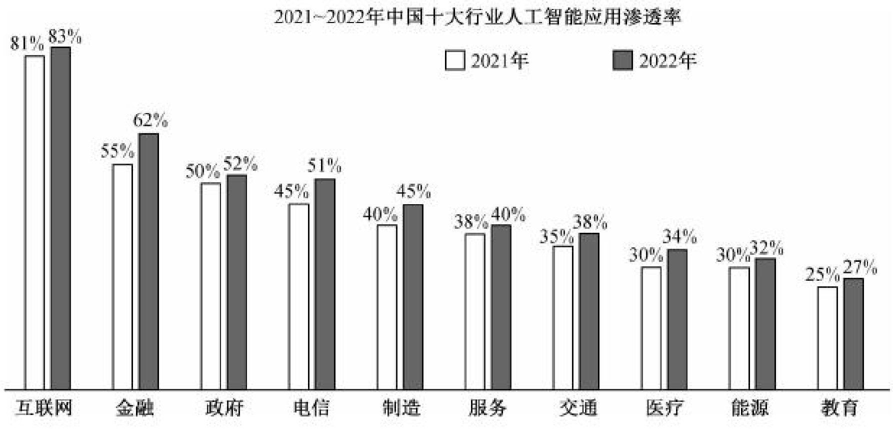
A. 1　　B. 3　　C. -1　　D. -3

2. 已知集合$A=\{1,2,3\}$，$B=\{x\mid a<x<a^2\}$，若$A\subseteq B$，则实数a的取值范围是

A. $(-\infty,-\sqrt{3}]$　　B. $(-\infty,-\sqrt{3})$

C. $(-\sqrt{3},1)$　　D. $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$

3. 如图为2021～2022年中国十大行业人工智能应用渗透率，则下列说法错误的是



A. 2021年与2022年人工智能应用渗透率最低的行业都是教育

B. 与2021年相比，2022年人工智能应用渗透率增长最快的是金融行业

C. 2021年十大行业人工智能应用渗透率的极差为56%

D. 2022年十大行业人工智能应用渗透率的中位数是42.5%

1
官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

4. 求值：$2\sin 80^\circ\cos 20^\circ-\dfrac{\sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ}=$

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5. 已知抛物线 $C_1:y^2=4x$ 与抛物线 $C_2:x^2=4y$，则

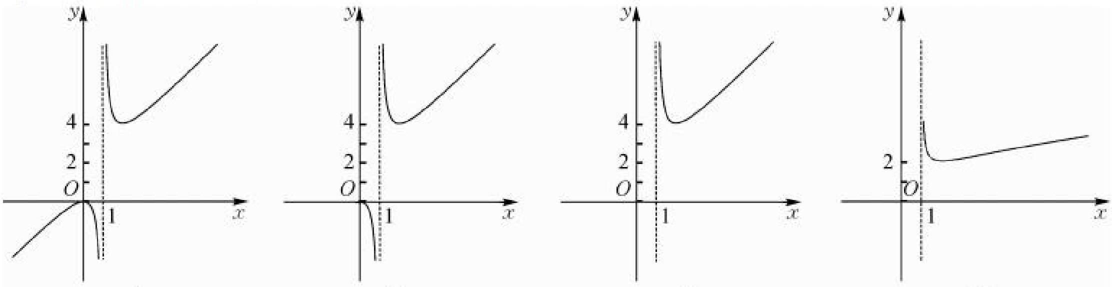
A. 过 C_1 与 C_2 焦点的直线方程为 $x+y=4$

B. C_1 与 C_2 只有 1 个公共点

C. 与 x 轴平行的直线与 C_1 及 C_2 最多有 3 个交点

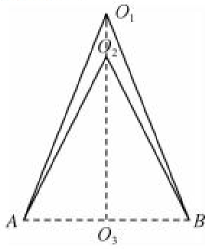
D. 不存在直线与 C_1 和 C_2 都相切

6. 若将 $\ln y=\ln x+\ln(y-x)$ 确定的两个变量 y 与 x 之间的关系看成 $y=f(x)$，则函数 $y=f(x)$ 的图象大致为



A　　B　　C　　D

7. 中国古建筑的屋檐下常系挂风铃，风吹铃动，悦耳清脆，亦称惊鸟铃. 若一个惊鸟铃由铜铸造而成，且可近似看作由一个较大的圆锥挖去一个较小的圆锥，两圆锥的轴在同一条直线上，截面图如下，其中 $O_1O_3=20$ cm，$O_1O_2=2$ cm，$AB=16$ cm，若不考虑铃舌，则下列数据比较接近该惊鸟铃质量的是(参考数据：$\pi\approx 3$，铜的密度为 $8.96\ \mathrm{g/cm^3}$)



A. 1 kg　　B. 2 kg　　C. 3 kg　　D. 0.5 kg

8. 若数列 $\{a_n\}$ 满足：当 $\dfrac{k^2-k+2}{2}\leqslant n\leqslant\dfrac{k^2+k}{2}$ 时，$a_n=2^k\left(1+\dfrac{2}{k}\right)(k\in\mathbf{N}^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 28 项和为

A. 2 048　　B. 2 046　　C. 4 608　　D. 4 606

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，P 是 C 上一点，则

A. $|PF_1|+|PF_2|-|F_1F_2|=4-\sqrt{3}$

B. $|PF_1||PF_2|$ 的最大值为 8

C. $|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|$ 的取值范围是 $[2,4]$

D. $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的取值范围是 $[-2,1]$

10. 已知 A,B 是随机事件，若 $P(A+B)=1$ 且 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)=\dfrac{1}{4}$，则

A. $P(A)=P(B)$　　B. A,B 相互独立　　C. $P(A)=\dfrac{3}{4}$　　D. $P(B|A)=\dfrac{2}{3}$

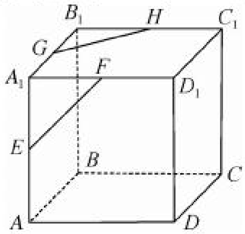
11. 已知点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$是函数 $f(x)=ax+\sin 3x(a\in\mathbf{R})$图象上两点，则
A. 对任意点 A，存在无数个点 B，使得曲线 $y=f(x)$在点 A，B 处的切线倾斜角相等
B. 若存在点 A，B，使得曲线 $y=f(x)$在点 A，B 处的切线垂直，则$-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{2}$
C. 若对于任意点 A，B，直线 AB 的斜率恒小于 1，则 a 的取值范围是$(-\infty,-2)$
D. 若 $x_1x_2\neq 0$ 且曲线 $y=f(x)$在点 A，B 处的切线都过原点，则$\dfrac{\tan 3x_1-\tan 3x_2}{x_1-x_2}=3$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. $\dfrac{(2x-y)^6}{x^2y^3}$的展开式中 x 的系数为________.

13. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+\pi)=f(-x)$，且 $f(x)$在区间$\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{12}\right)$上单调，则 ω 的值为________.

14. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 E,F,G,H 分别为棱 AA_1，A_1D_1，A_1B_1，B_1C_1 的中点，且点 E,F,G,H 都在球 O 的表面上，点 P 是球 O 表面上的动点，当点 P 到平面 ADD_1A_1 的距离最大时，异面直线 PE 与 GH 所成角的余弦值的平方为________.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

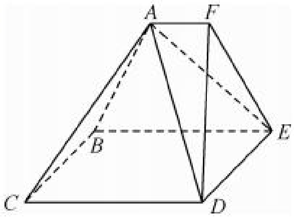
15.（本小题满分 13 分）
在$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$\sin^2B+\sin^2C=\sin^2A+\sin B\sin C$.
(1)若$\triangle ABC$ 的面积 $S=2\sqrt{3}$，$b+c=6$，求 a 的值；
(2)若函数 $f(x)=3x^2-4x-\dfrac{\ln x}{\cos A}+1$ 在区间$(0,t)$上有零点，求 t 的取值范围.

16.（本小题满分 15 分）
我国一科技公司生产的手机前几年的零部件严重依赖进口，2019 年某大国对其实施限制性策略，该公司启动零部件国产替代计划，与国内产业链上下游企业开展深度合作，共同推动产业发展. 2023 年 9 月该公司最新发布的智能手机零部件本土制造比例达到了 90%，该公司与一零部件制造公司合作生产某手机零部件，为提高零部件质量，该公司通过资金扶持与技术扶持，帮助制造公司提高产品质量和竞争力，同时派本公司技术人员进厂指导，并每天随机从生产线上抽取一批零件进行质量检测. 下面是某天从生产线上抽取的 10 个零部件的质量分数（总分 1 000 分，分数越高质量越好）：928、933、945、950、959、967、967、975、982、994. 假设该生产线生产的零部件的质量分数 X 近似服从正态分布 $N(\mu,20^2)$，并把这 10 个样本质量分数的平均数 $\bar{x}$ 作为 μ 的值.
参考数据：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx 0.68$.

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

(1)求 μ 的值；
(2)估计该生产线上生产的 1 000 个零部件中，有多少个零部件的质量分数低于 940？
(3)若从该生产线上随机抽取 n 个零件中恰有 ξ 个零部件的质量分数在 $[940,980]$ 内，则 n 为何值时，$P(\xi=10)$ 的值最大？

17.(本小题满分 15 分)
如图，多面体 $ABCDEF$ 是由一个正四棱锥 $A-BCDE$ 与一个三棱锥 $F-ADE$ 拼接而成，正四棱锥 $A-BCDE$ 的所有棱长均为 $3\sqrt{2}$，$AF/\!/CD$.
(1)在棱 DE 上找一点 G，使得平面 $ABC\perp$ 平面 AFG，并证明你的结论；
(2)若 $AF=\sqrt{2}$，求直线 DF 与平面 ABC 所成角的正弦值.



18.(本小题满分 17 分)
已知双曲线 $C_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线与双曲线 $C_2:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的一条渐近线垂直，且 C_1 的一个焦点到 C_2 的一条渐近线的距离为 2.
(1)求 C_1 的方程；
(2)若 C_1 上任意一点 A 关于直线 $y=x$ 的对称点为 A'，过 A' 分别作 C_2 的两条渐近线的平行线，与 C_2 分别交于 P,Q，求证：$|A'P|\cdot|A'Q|$ 为定值.

19.(本小题满分 17 分)
同余定理是数论中的重要内容. 同余的定义为：设 $a,b\in\mathbf{Z}$，$m\in\mathbf{N}^*$ 且 $m>1$. 若 $m|a-b$ 则称 a 与 b 关于模 m 同余，记作 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$(“|”为整除符号).
(1)解同余方程 $x^2-x\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$；
(2)设(1)中方程的所有正根构成数列$\{a_n\}$，其中 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$.
①若 $b_n=a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n，求 S_{2024}；
②若 $c_n=\tan a_{2n+1}\cdot\tan a_{2n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

4
官方微信公众号：zizzsw
咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com
微信客服：zizzs2018

合肥一中2024届高三上学期期末质量检测卷·数学

参考答案、提示及评分细则

1. A　$\frac{3+ai}{2-i}=\frac{(3+ai)(2+i)}{5}=\frac{6-a}{5}+\frac{3+2a}{5}i$，$\frac{3+ai}{2-i}$的实部与虚部相等，则$\frac{6-a}{5}=\frac{3+2a}{5}$，所以$a=1$．故选A．

2. B　因为$A=\{1,2,3\}$，$B=\{x|a<x<a^2\}$，若$A\subseteq B$，则$\begin{cases}a<1,\\a^2>3,\end{cases}$所以$a<-\sqrt{3}$．故选B．

3. B　由图易得A正确；与2021年相比，2022年人工智能应用渗透率增长最快的是电信和医疗行业，B错误；2021年十大行业人工智能应用渗透率的极差为$81\%-25\%=56\%$，C正确；2022年十大行业人工智能应用渗透率的中位数是$\frac{45\%+40\%}{2}=42.5\%$，D正确．故选B．

4. D　$2\sin 80°\cos 20°=2\sin(60°+20°)\cos 20°=(\sqrt{3}\cos 20°+\sin 20°)\cos 20°=\sqrt{3}\cos^2 20°+\sin 20°\cos 20°=\frac{\sqrt{3}(1+\cos 40°)}{2}+\frac{\sin 40°}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin(40°+60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 10°$，$2\sin 80°\cos 20°-\frac{\sin 20°}{2\sin 10°}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 10°-\cos 10°=\frac{\sqrt{3}}{2}$．故选D．

5. C　C_1的焦点为$(1,0)$，C_2的焦点为$(0,1)$，过C_1与C_2焦点的直线方程为$x+y=1$，A错误；C_1与C_2有$(0,0)$，$(4,4)$ 2个公共点，B错误；与x轴平行的直线与C_1有1个交点，与C_2最多有2个交点，C正确；C_1与C_2关于直线$y=x$对称，若存在直线与C_1和C_2都相切，则该切线也关于直线$y=x$对称，不妨设为$y=-x+t$，与$x^2=4y$联立得$x^2+4x-4t=0$，由$\Delta=0$得$t=-1$，所以直线$y=-x-1$与C_1和C_2都相切，D错误．故选C．

6. C　由$\ln y=\ln x+\ln(y-x)$得$y=x(y-x)=xy-x^2$，所以$y=\frac{x^2}{x-1}$，由$x>0$，$y>0$得$x>1$，所以$f(x)=\frac{x^2}{x-1}(x>1)$，排除AB，由$f(2)=4$，可排除D．故选C．

7. A　由题意可得惊鸟铃的体积约为$\frac{1}{3}\times\pi\times 8^2\times 20-\frac{1}{3}\times\pi\times 8^2\times 18=128(\mathrm{cm}^3)$，所以该惊鸟铃的质量约为$128\times 8.96=1146.88(\mathrm{g})\approx 1(\mathrm{kg})$．故选A．

8. B　满足$\frac{k^2-k+2}{2}\leqslant n\leqslant\frac{k^2+k}{2}$的$n$的值共有$k$个，对应的数列的项也有$k$个，这$k$项的和为$\left(1+\frac{2}{k}\right)2^k\times k=(k+2)2^k=(k+1)2^{k+1}-k2^k$，设$b_n=(n+1)2^{n+1}-n2^n$，数列$\{a_n\}$的前28项和就是数列$\{b_n\}$的前7项和，其和为$8\times 2^8-2=2\ 046$．故选B．

9. CD　由椭圆定义得$|PF_1|+|PF_2|=4$，$|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，$|PF_1|+|PF_2|-|F_1F_2|=4-2\sqrt{3}$，A错误；$|PF_1||PF_2|\leqslant\left(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=4$，当$|PF_1|=|PF_2|$时取等号，B错误；$F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，设$P(x,y)$，则$-2\leqslant x\leqslant 2$，$y^2=1-\frac{x^2}{4}$，$|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|=2\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}$，由$-2\leqslant x\leqslant 2$，可得$2\leqslant|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|\leqslant 4$，C正确；$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=x^2-3+y^2=\frac{3}{4}x^2-2$，$-2\leqslant\frac{3}{4}x^2-2\leqslant 1$，D正确．故选CD．

10. ACD　因为$P(A)=P(AB+A\overline{B})=P(AB)+P(A\overline{B})$，$P(B)=P(AB+\overline{A}B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$，因为$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$，所以$P(A)=P(B)$，A正确；因为$P(A+B)=P(AB+\overline{A}B+A\overline{B})=P(AB)+P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})=P(AB)+\frac{1}{2}=1$，所以$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(A)=P(B)=P(AB)+P(A\overline{B})=\frac{3}{4}$，

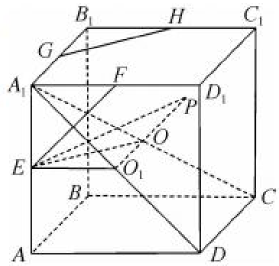
$P(AB)\neq P(A)P(B)$，B 错误，C 正确；$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$，D 正确. 故选 ACD.

11. ABD 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，对于 A，因为 $f'(x)=a+3\cos 3x$，要使 $f'(x)=f'(x_1)$，则 $x=\pm x_1+\frac{2k\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，$x$ 的值有无数个，A 正确；对于 B，存在点 A，B，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 A，B 处的切线垂直，即存在 x_1，x_2，使得 $f'(x_1)f'(x_2)=(a+3\cos 3x_1)(a+3\cos 3x_2)=-1$，因为 $a-3\leqslant a+3\cos 3x_1\leqslant a+3$，$a-3\leqslant a+3\cos 3x_2\leqslant a+3$，所以 $(a-3)(a+3)\leqslant -1$，$-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{2}$，B 正确；对于 C，对于任意点 A，B，直线 AB 的斜率恒小于 1，则 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<1$，即 $\frac{f(x_1)-x_1-[f(x_2)-x_2]}{x_1-x_2}<0$，所以 $y=f(x)-x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数，所以 $f'(x)-1=a-1+3\cos 3x\leqslant a+2\leqslant 0$，$a\leqslant -2$，C 错误；对于 D，曲线 $y=f(x)$ 在点 A，B 处的切线都过原点，则 $a+3\cos 3x_1=\frac{ax_1+\sin 3x_1}{x_1}$，整理得 $\tan 3x_1=3x_1$，同理可得 $\tan 3x_2=3x_2$，所以 $\frac{\tan 3x_1-\tan 3x_2}{x_1-x_2}=3$，D 正确. 故选 ABD.

12. -160 $\frac{(2x-y)^6}{x^2y^3}$ 的展开式中 x 的系数即 $(2x-y)^6$ 展开式中 x^3y^3 的系数，即 $C_6^3\cdot 2^3\cdot(-1)^3=-160$.

13. $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{8}{3}$ 因为 $f(x+\pi)=f(-x)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=\pm 1$，即 $\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=\frac{2}{3}+2k$，$k\in\mathbf{Z}$，$\because\omega>0$，$\therefore k\geqslant 0$，$k\in\mathbf{Z}$，因为 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}\right)$ 上单调，所以 $\frac{\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{T}{2}$，解得 $\omega\leqslant 3$. 经检验，当 $k=0$ 时，$\omega=\frac{2}{3}$，当 $k=1$ 时，$\omega=\frac{8}{3}$ 均满足题意.

14. $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ 点 E，F，G，H 都在球 O 的表面上，则球 O 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱切球，球心为对角线 A_1C 的中点，半径为 $\sqrt{2}$，取 A_1D 的中点 O_1，则点 P 为 O_1O 延长线与球 O 表面的交点时点 P 到平面 ADD_1A_1 的距离最大，此时 $O_1P=1+\sqrt{2}$，$O_1E=1$，$PE=\sqrt{O_1E^2+O_1P^2}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. 连接 OE，则 $OE/\!/AC/\!/GH$，$\angle PEO$ 就是异面直线 PE 与 GH 所成角，因为 $OE=OP=\sqrt{2}$，所以 $\cos\angle PEO=\frac{\frac{1}{2}PE}{OE}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$，所以异面直线 PE 与 GH 所成角的余弦值的平方为 $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.



15. 解：$\because\triangle ABC$ 中三边 a，b，c 的对角分别为 A，B，C，

$\therefore\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

又 $\because\sin^2B+\sin^2C=\sin^2A+\sin B\sin C$，

$\therefore b^2+c^2=a^2+bc$，即 $b^2+c^2-a^2=bc$，

$\therefore\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$. …………………………………………………… 3 分

(1) $\because S=2\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$，

$\therefore bc=8$，$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc(1+\cos A)$

$=6^2-2\times 8\times\left(1+\frac{1}{2}\right)=12$，

$\therefore a=2\sqrt{3}$. …………………………………………………………………………… 6 分

(2) $f(x)=3x^2-\dfrac{\ln x}{\cos A}-4x+1=3x^2-2\ln x-4x+1(x>0)$,

$f'(x)=6x-\dfrac{2}{x}-4=\dfrac{6x^2-4x-2}{x}=\dfrac{2(x-1)(3x+1)}{x}$, ………………………… 8 分

$\because x>0$, $\therefore f'(x)$在$(0,1)$上为负，在$(1,+\infty)$上为正，

$\therefore f(x)$在$(0,1)$上为减函数，在$(1,+\infty)$上为增函数，………………………… 10 分

$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=3-4+1=0$, $\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上只有一个零点. ………………………… 12 分

$\therefore$要使 $f(x)$在$(0,t)$上有零点，则 t 的取值范围是$(1,+\infty)$. ………………………… 13 分

16. 解：(1) $\bar{x}=900+\dfrac{28+33+45+50+59+67+67+75+82+94}{10}=960$, ………………………… 2 分

所以 $\mu=960$. ………………………… 3 分

(2)由(1)知，$X\sim N(960,20^2)$，

$P(X<940)=P(X<\mu-\sigma)=\dfrac{1-P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)}{2}\approx\dfrac{1-0.68}{2}=0.16$.

该生产线上生产的 1 000 个零部件中，质量分数低于 940 的个数约为

$0.16\times1\ 000=160$. ………………………… 7 分

(3)每个零部件的质量分数在$[940,980]$内的概率为 $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx0.68$，

由题意可知 $\xi\sim B(n,0.68)$，

则 $P(\xi=10)=C_n^{10}\times0.68^{10}\times0.32^{n-10}$，………………………… 9 分

设 $f(n)=C_n^{10}\times0.68^{10}\times0.32^{n-10}\ (n\geqslant10)$，

则$\dfrac{f(n+1)}{f(n)}=\dfrac{C_{n+1}^{10}\times0.68^{10}\times0.32^{n-9}}{C_n^{10}\times0.68^{10}\times0.32^{n-10}}=\dfrac{0.32n+0.32}{n-9}$, ………………………… 11 分

令$\dfrac{0.32n+0.32}{n-9}>1$，得 $n<\dfrac{9.32}{0.68}\approx13.7$，

所以当 $n\leqslant13$ 时，$f(n+1)>f(n)$，………………………… 12 分

令$\dfrac{0.32n+0.32}{n-9}<1$，得 $n>\dfrac{9.32}{0.68}\approx13.7$，

所以当 $n\geqslant14$ 时，$f(n+1)<f(n)$，………………………… 14 分

所以 $n=14$ 时，$f(n)$最大，故使 $P(\xi=10)$最大的 n 的值为 14. ………………………… 15 分

17. 解：(1)当点 G 为 DE 中点时，平面 $AFG\perp$平面 ABC，证明如下：………………………… 1 分

因为四棱锥 $A-BCDE$ 是正四棱锥，

所以 $AD=AE$，$AG\perp DE$. ………………………… 2 分

在正方形 $BCDE$ 中，$DE/\!/BC$，所以 $AG\perp BC$，

在正方形 $BCDE$ 中，$CD\perp BC$，因为 $AF/\!/CD$，

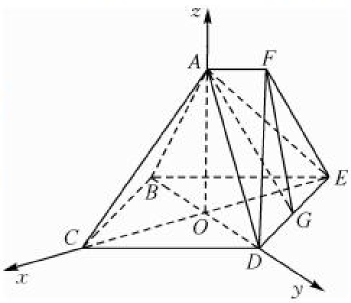
所以 $AF\perp BC$，………………………… 4 分

因为 $AF\cap AG=A$，$AF,AG\subset$平面 AFG，

所以 $BC\perp$平面 AFG，………………………… 5 分

因为 $BC\subset$平面 ABC，

所以平面 $ABC\perp$平面 AFG. ………………………… 6 分



(2)连接 BD，与 CE 交于点 O，连接 AO，因为四棱锥 $A-BCDE$ 是正四棱锥，

所以 OC,OD,OA 两两垂直，以 O 为坐标原点，以直线 OC,OD,OA 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $O(0,0,0)$，$A(0,0,3)$，$B(0,-3,0)$，$C(3,0,0)$，$D(0,3,0)$，$F(-1,1,3)$，………………………… 9 分

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

所以$\overrightarrow{BA}=(0,3,3)$，$\overrightarrow{CA}=(-3,0,3)$，$\overrightarrow{DF}=(-1,-2,3)$. ………… 10 分

设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则有$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}3y+3z=0,\\ -3x+3z=0,\end{cases}$

取 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$， ………… 13 分

设直线 DF 与平面 ABC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{DF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{DF}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|(-1)\times1+(-2)\times(-1)+3\times1|}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+3^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{42}}{21}$，

故直线 DF 与平面 ABC 所成角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{42}}{21}$. ………… 15 分

18. (1)解：双曲线 C_2 的一条渐近线的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$，

因为双曲线 C_1 的一条渐近线与双曲线 C_2 的一条渐近线垂直，

所以双曲线 C_1 的一条渐近线的方程为 $y=-2x$，所以$\dfrac{b}{a}=2$，$b=2a$， ………… 3 分

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}a$，所以 C_1 的一个焦点为 $F(\sqrt{5}a,0)$，

点 F 到双曲线 C_2 的一条渐近线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 的距离为$\dfrac{\sqrt{5}a}{\sqrt{5}}=a=2$，

所以 $b=4$，C_1 的方程为$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$. ………… 7 分

(2)证明：设 $A(m,n)$，则$\dfrac{m^2}{4}-\dfrac{n^2}{16}=1$，即 $4m^2-n^2=16$，$m^2\geqslant4$， ………… 8 分

由题意，得 $A'(n,m)$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，不失一般性，设 $A'P$ 的斜率为$\dfrac{1}{2}$，

则直线 $A'P$ 的方程为 $y-m=\dfrac{1}{2}(x-n)$，与$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 联立得

$x_1=\dfrac{2}{n-2m}+\dfrac{n-2m}{2}=-\dfrac{2m+n}{8}-m+\dfrac{1}{2}n=\dfrac{3}{8}n-\dfrac{5}{4}m$，

直线 $A'Q$ 的方程为 $y-m=-\dfrac{1}{2}(x-n)$，与$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 联立得

$x_2=\dfrac{2m+n}{2}+\dfrac{2}{2m+n}=\dfrac{2m+n}{2}+\dfrac{2m-n}{8}=\dfrac{3}{8}n+\dfrac{5}{4}m$， ………… 15 分

所以 $|A'P||A'Q|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}|x_1-n|\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2}|x_2-n|=\dfrac{5}{4}\left|\dfrac{25n^2}{64}-\dfrac{25m^2}{16}\right|=\dfrac{125}{64}\left|\dfrac{n^2}{4}-m^2\right|=\dfrac{125}{16}$，

故$|A'P||A'Q|$为定值$\dfrac{125}{16}$. ………… 17 分

19. 解：(1)由题意 $x(x-1)\equiv0(\mathrm{mod}3)$，所以 $x=3k$ 或 $x-1=3k(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=3k$ 或 $x=3k+1(k\in\mathbf{Z})$.
………… 4 分

(2)由(1)可得$\{a_n\}$为$\{3,4,6,7,9,10,\cdots\}$，所以 $a_n=\begin{cases}3\times\dfrac{n+1}{2}(n\text{ 为奇数}),\\ 3\times\dfrac{n}{2}+1(n\text{ 为偶数}).\end{cases}$ ………… 6 分

①因为 $b_n=a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $b_n=\begin{cases}1(n\text{ 为奇数}),\\ 2(n\text{ 为偶数}).\end{cases}$

$S_{2\,024}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2\,024}=3\times1\,012=3\,036$. ………… 9 分

②$c_n=\tan a_{2n+1}\cdot\tan a_{2n-1}=\tan3n\cdot\tan3(n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$. ………… 10 分

因为 $\tan3n\cdot\tan3(n+1)=\dfrac{\tan3(n+1)-\tan3n}{\tan3}-1$， ………… 13 分

所以 $T_n=c_1+c_2+\cdots c_n=\left(\dfrac{\tan6-\tan3}{\tan3}-1\right)+\left(\dfrac{\tan9-\tan6}{\tan3}-1\right)+\cdots+\left(\dfrac{\tan3(n+1)-\tan3n}{\tan3}-1\right)$

$=\dfrac{\tan3(n+1)-\tan3}{\tan3}-n=\dfrac{\tan3(n+1)}{\tan3}-n-1$. ………… 17 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛、少年班、研学实践、综合素质评价、新高考选科、大学专业、志愿填报、港澳升学、中外合作校、大学保研留学等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线