长郡中学2022级高二上期阶段性检测

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	B	D	D	D	B	C	ABD	ACD	AC	AD

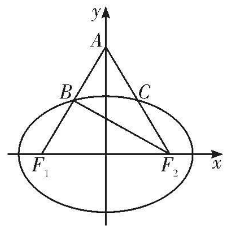
一、选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. B 【解析】$y'=e^x\cos x-e^x\sin x$,$k=y'|_{x=0}=1$,故选:B.

2. C 【解析】$a_2+a_5+a_8=3a_5=18$,所以$a_5=6$,$S_9=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=54$.故选:C.

3. B 【解析】圆$C_1:(x-2)^2+(y+1)^2=9$的圆心$C_1(2,-1)$,半径$r_1=3$,圆$C_2:(x+2)^2+(y-2)^2=8$的圆心$C_2(-2,2)$,半径$r_2=2\sqrt{2}$,所以$|C_1C_2|=\sqrt{4^2+3^2}=5$,$r_1+r_2=3+2\sqrt{2}$,$r_1-r_2=3-2\sqrt{2}$则$3-2\sqrt{2}<|C_1C_2|<3+2\sqrt{2}$,故两圆相交.故选:B.

4. D 【解析】由题可知等边$\triangle AF_1F_2$的边AF_1的中点为B,所以可得$|F_1F_2|=2c$,$|BF_1|=c$,$\angle AF_1F_2=\dfrac{\pi}{3}$,$\angle F_1BF_2=\dfrac{\pi}{2}$,所以$BF_2=\sqrt{3}c$,



由椭圆定义可得$|BF_1|+|BF_2|=2a$,即$c+\sqrt{3}c=2a$,则离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$.

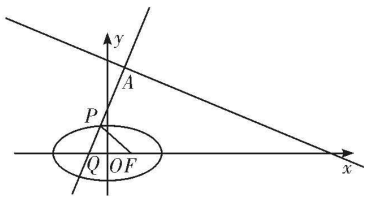
故选:D.

5. D 【解析】由等比数列的性质可得S_3,S_6-S_3,S_9-S_6仍成等比数列,

$\because \dfrac{S_6}{S_3}=4$,$\therefore S_6=4S_3$,$\therefore S_3$,$3S_3$,$S_9-4S_3$成等比数列,$\therefore S_9-4S_3=9S_3$,解得$S_9=13S_3$,

$\therefore \dfrac{S_9}{S_6}=\dfrac{13S_3}{4S_3}=\dfrac{13}{4}$,故选D.

6. D 【解析】$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\Rightarrow a=2,b=\sqrt{3}\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=1$,



设Q为该椭圆的左焦点,$Q(-1,0)$,

所以$|PQ|+|PF|=2a=4$,于是$|PA|-|PF|=|PA|-(4-|PQ|)=|PA|+|PQ|-4$,

显然当Q,P,A三点共线,且PA与$x+\sqrt{3}y-12=0$垂直时,

$|PA|-|PF|$有最小值,最小值为$\dfrac{|-1-12|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}-4=\dfrac{5}{2}$,故选:D.

7. B 【解析】设圆锥的底面半径为r,母线长为l,由题意得$\pi r^2=\pi$,所以$r=1$,

因为圆锥的侧面积是底面积的2倍,所以$S_{侧}=\pi rl=2\pi$,得$l=2$,

易知圆锥的轴截面是边长为2的正三角形,其外接圆的半径R即圆锥外接球的半径,

所以$R=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,故该圆锥外接球的表面积$S=4\pi R^2=\dfrac{16\pi}{3}$,故选:B.

8. C 【解析】由已知可得:$x^2f'(x)+2xf(x)=\ln x$,令$g(x)=x^2f(x)$,则$g'(x)=x^2f'(x)+2xf(x)=\ln x$,且

$f(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$,$f'(x)=\dfrac{xg'(x)-2g(x)}{x^3}=\dfrac{x\ln x-2g(x)}{x^3}$,再令$h(x)=x\ln x-2g(x)$,则$h'(x)=1+\ln x-2g'(x)=1-\ln x$,

$\therefore$当$x\in(0,e)$时,$h'(x)>0$,$h(x)$为增函数;

当$x\in(e,+\infty)$时,$h'(x)<0$,$h(x)$为减函数;$\therefore h(x)\leqslant h(e)=e-2g(e)=e-2e^2f(e)=0$,

$\therefore f'(x)\leqslant 0$在$(0,+\infty)$上恒成立;$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数;又因为$\dfrac{1}{e}=\dfrac{\ln e}{e}$,$\dfrac{\sqrt{2}\ln 2}{4}=\dfrac{\ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$,$\ln\sqrt{2}=\dfrac{\ln 2}{2}$,故令$\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,$\varphi'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,当$x\in(0,e)$时,$\varphi'(x)>0$,$\varphi(x)$为增函数;$\because \dfrac{1}{e}>\ln\sqrt{2}>\dfrac{\sqrt{2}\ln 2}{4}$,$\therefore a<c<b$,故选:C.

二、多选题(本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得5分,有选错的得0分,部分选对的得2分)

9. ABD 【解析】由$l_1:x+(a-1)y+1=0$易知$y=0\Rightarrow x=-1$,故A正确;由$l_2:ax+2y+2=0\Rightarrow x=0,y=-1$,故B正确;若两直线平行,则有$1\times2=a(a-1)$且$1\times2\neq a\times1$,解得$a=-1$,故C错误;若两直线垂直,则有$a\times1+2\times(a-1)=0\Rightarrow a=\dfrac{2}{3}$,故D正确.

故选:ABD.

10. ACD 【解析】根据题意:$\because\begin{cases}S_8<S_9,\\S_{10}<S_9,\end{cases}\therefore\begin{cases}S_9-S_8=a_9>0,\\S_{10}-S_9=a_{10}<0,\end{cases}$即$\begin{cases}-a_9=-a_1-8d<0,\\a_{10}=a_1+9d<0,\end{cases}$两式相加,

解得：$\begin{cases}a_1>0,\\d<0,\end{cases}$故 A 正确. 由 $S_{10}<S_8$，可得到 $a_9+a_{10}<0<a_9$，所以 $a_8+a_{11}<0$，

$a_{10}+a_{11}-(a_8+a_9)=4d<0$，$a_{10}+a_{11}+a_8+a_9<0$，所以 $|a_8+a_9|<|a_{10}+a_{11}|$，故 C 正确；

由以上可得：$a_1>a_2>a_3>\cdots>a_9>0>a_{10}>a_{11}>\cdots$，

$S_{17}=\dfrac{17(a_1+a_{17})}{2}=17a_9>0$，而 $S_{18}=\dfrac{18(a_1+a_{18})}{2}=9(a_9+a_{10})<0$，

当 $n\leqslant17$ 时，$S_n>0$；当 $n\geqslant18$ 时，$S_n<0$；则使得 $S_n>0$ 成立的最大自然数 $n=17$，故 B 错误. 当 $n\leqslant9$，或 $n\geqslant18$ 时，$\dfrac{S_n}{a_n}>0$；

当 $9<n<18$ 时，$\dfrac{S_n}{a_n}<0$；

由 $0>a_{10}>a_{11}>\cdots>a_{17}$，$S_{10}>S_{11}>S_{12}>\cdots>S_{17}>0$，所以 $\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 中最小项为 $\dfrac{S_{10}}{a_{10}}$，故 D 正确. 故选：ACD.

11. AC 【解析】对于 A，B：由题意可得 $0<x_1<1$，$x_2>1$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)=-\dfrac{1}{x}$，当 $x>1$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，所以 l_1，l_2 的斜率分别为 $k_1=-\dfrac{1}{x_1}$，$k_2=\dfrac{1}{x_2}$，

因为 $l_1\perp l_2$，所以 $k_1k_2=-\dfrac{1}{x_1x_2}=-1$，得 $x_1x_2=1$，因为 $0<x_1<x_2$，所以 $x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}=2$，

故 A 正确，B 错误. 对于 C，D：l_1 的方程为 $y+\ln x_1=-\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)$，即 $y=-\dfrac{1}{x_1}x+1-\ln x_1$，

令 $x=0$，得 $y=1-\ln x_1$，所以 l_1 在 y 轴上的截距为 $1-\ln x_1$，l_2 的方程为 $y=\dfrac{1}{x_2}x-1+\ln x_2$，可得 l_2 在 y 轴上的截距为 $-1+\ln x_2$，所以 l_1，l_2 在 y 轴上的截距之差为 $1-\ln x_1-(-1+\ln x_2)=2-\ln(x_1x_2)=2$，$l_1$，$l_2$ 在 y 轴上的截距之积为 $(1-\ln x_1)(-1+\ln x_2)=-(1-\ln x_1)(1+\ln x_1)=(\ln x_1)^2-1>-1$，故 C 正确，D 错误. 故选：AC.

12. AD 【解析】A：由抛物线的方程可得焦点 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，准线方程为：$x=-\dfrac{p}{2}$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 AB 的中点 $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，利用焦点弦的性质可得 $|AB|=x_1+x_2+p$，而 AB 的中点 M 准线的距离：$d=\dfrac{x_1+x_2}{2}-\left(-\dfrac{p}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2+p)=\dfrac{1}{2}|AB|$，

∴以 AB 为直径的圆与该抛物线的准线相切，因此 A 正确；

B：设直线 AB 的方程为 $x=my+\dfrac{p}{2}$，$k=\dfrac{1}{m}>0$，联立 $\begin{cases}x=my+\dfrac{p}{2},\\y^2=2px,\end{cases}$

整理可得：$y^2-2mpy-p^2=0$，可得 $y_1+y_2=2mp$，$y_1y_2=-p^2$，

$\because\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，$\therefore y_1=-2y_2$，解得 $y_2=-2mp$，$y_1=4mp$，$\therefore-8m^2p^2=-p^2$，解得 $m^2=\dfrac{1}{8}$，

$\therefore k=\sqrt{\dfrac{1}{m^2}}=2\sqrt{2}$，因此 B 不正确；

C：设 $M(x,y)$，结合 A，B 可得：$y=\dfrac{y_1+y_2}{2}=mp$，$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{m(y_1+y_2)}{2}+\dfrac{p}{2}=m^2p+\dfrac{p}{2}$，消去 m 可得：$y^2=px-\dfrac{p^2}{2}$，因此 C 错误；

D：若 $p=4$ 则抛物线 C：$y^2=8x$，不妨设 $x_1>x_2>0$，

$x_1x_2=\dfrac{(y_1y_2)^2}{64}=4$，$\therefore|AF|+4|BF|=x_1+4x_2+10=\dfrac{4}{x_2}+4x_2+10\geqslant4\times2\sqrt{\dfrac{1}{x_2}\cdot x_2}+10=18$，当且仅当 $x_2=1$，$x_1=4$ 时取等号，因此 D 正确. 故选：AD.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. $\sqrt{3}$ 【解析】由双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，得 $a^2=1$，$b^2=3$，则 $c^2=a^2+b^2=4$，解得 $c=2$，则左焦点 $F_1(-2,0)$，渐近线方程为：$y=\pm\sqrt{3}x$.

由对称性，不妨取其中一条渐近线 $y=\sqrt{3}x$，即 $\sqrt{3}x-y=0$，则左焦点 $F_1(-2,0)$ 到渐近线的距离 $d=\dfrac{|-2\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\sqrt{3}$. 故答案为：$\sqrt{3}$.

14. $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ 【解析】因为函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+a\ln x$ 有两个不同的极值点，

所以 $f'(x)=x-1+\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2-x+a}{x}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有 2 个不同的零点，

所以方程 $x^2-x+a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的实根，所以 $\begin{cases}\Delta=1-4a>0,\\ a>0,\end{cases}$

解得 $0<a<\frac{1}{4}$，故答案为：$\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

15. 3 【解析】不妨设 P 在第二象限，$|FM|=m$，$H(0,h)(h>0)$，设点 $N(0,n)$，

$\because \overrightarrow{HN}=-3\overrightarrow{OH}$，则 $(0,n-h)=-3(0,h)$，$\therefore n-h=-3h$，

可得 $n=-2h$，则点 $N(0,-2h)$，

由 $\triangle AFM\backsim\triangle AON$，得 $\frac{m}{2h}=\frac{c-a}{a}$，①

由 $\triangle BOH\backsim\triangle BFM$，得 $\frac{h}{m}=\frac{a}{a+c}$，②

①②两式相乘得 $\frac{c-a}{c+a}=\frac{1}{2}$，即 $c=3a$，离心率为 $e=\frac{c}{a}=3$.

16. (1)86；(2) $\frac{4^n+2}{3}$（第一空 2 分，第二空 3 分）

【解析】由题意得：$g(n)=\begin{cases}n, n=2k-1, k\in\mathbf{N}^*,\\ g\left(\frac{n}{2}\right), n=2k, k\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$

$S(4)=g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(16)=g(1)+g(3)+\cdots+g(15)+g(2)+g(4)+\cdots+g(16)$

$=1+3+5+\cdots+15+g(1)+g(2)+\cdots+g(8)$

$=64+g(1)+g(3)+g(5)+g(7)+g(2)+g(4)+g(6)+g(8)$

$=64+1+3+5+7+g(1)+g(2)+g(3)+g(4)=64+16+1+3+g(1)+g(2)$

$=64+16+1+3+1+g(1)=64+16+1+3+1+1=86$；

$S(n)=g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+\cdots+g(2^n-1)+g(2^n)$

$=g(1)+g(3)+\cdots+g(2^n-1)+g(1)+g(2)+\cdots+g(2^{n-1})$

$=1+3+\cdots+2^n-1+S(n-1)=4^{n-1}+S(n-1)=4^{n-1}+4^{n-2}+S(n-2)$

$=4^{n-1}+4^{n-2}+4^{n-3}+S(n-3)=\cdots=4^{n-1}+4^{n-2}+4^{n-3}+\cdots+4+S(1)$

$=\frac{4^n-4}{3}+g(1)+g(2)=\frac{4^n-4}{3}+2g(1)=\frac{4^n-4}{3}+2=\frac{4^n+2}{3}$，故答案为：86；$\frac{4^n+2}{3}$.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.【解析】(1) 1°. 若直线 l 斜率不存在，则直线 l 方程为 $x=3$，与圆 C 相切，符合题意；…… 2 分

2°若直线 l 斜率存在，设直线 l 方程为 $y=k(x-3)+2$，即 $y=kx-3k+2$，

$d=\frac{|2k-3k+2|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=\frac{3}{4}$.

此时直线 l 的方程为：$y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$，

综上直线 l 的方程为：$y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$ 或 $x=3$. …… 5 分

(2) 联立 $\begin{cases}(x-2)^2+y^2=1,\\ x^2+y^2-3x-y=0,\end{cases}$ 得直线 AB 方程为 $x-y-3=0$.

圆心 $C(2,0)$ 到直线 AB 距离为 $d=\frac{|2-3|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故公共弦长 $|AB|=2\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$. …… 10 分

18.【解析】(1) 证明：因为 $a_{n+1}+a_n=4\cdot 3^n$，

所以 $\frac{a_{n+1}-3^{n+1}}{a_n-3^n}=\frac{4\cdot 3^n-a_n-3^{n+1}}{a_n-3^n}=\frac{3^n-a_n}{a_n-3^n}=-1$，

所以数列 $\{a_n-3^n\}$ 是等比数列，其中首项为 $a_1-3^1=-1$，公比为 -1；…… 6 分

(2) 由 (1) 可得 $a_n-3^n=(-1)\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^n$，所以 $a_n=(-1)^n+3^n$，

所以 $S_n=[(-1)^1+3^1]+[(-1)^2+3^2]+\cdots+[(-1)^n+3^n]=[(-1)^1+(-1)^2+\cdots+(-1)^n]+[3^1+3^2+\cdots+3^n]$，

当 n 为奇数时，$S_n=-1+\frac{3(1-3^n)}{1-3}=\frac{3^{n+1}-5}{2}$，当 n 为偶数时，$S_n=\frac{3(1-3^n)}{1-3}=\frac{3^{n+1}-3}{2}$.

综上所述 $S_n=\begin{cases}\frac{3^{n+1}-5}{2}, n\text{ 为奇数},\\ \frac{3^{n+1}-3}{2}, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ …… 12 分

19.【解析】(1)由题可得：$f(x)=x^2-x+1+e^x$，$f'(x)=2x-1+e^x$，…………………… 1分

易知 $f'(x)=2x-1+e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增且 $f'(0)=0$，

故 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$；$x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；

故 $f(x)$ 单调递减区间为 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$． …………………… 5分

(2)由 $f(x)=0$ 得，$a=\dfrac{x^2-x+1}{e^x}$，令 $g(x)=\dfrac{x^2-x+1}{e^x}$，则

$g'(x)=\dfrac{(2x-1)e^x-(x^2-x+1)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{-(x^2-3x+2)}{e^x}=\dfrac{-(x-1)(x-2)}{e^x}$，

$x\in(-\infty,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；$x\in(1,2)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；$x\in(2,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

$x\to-\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$；$x\to+\infty$ 时，$g(x)\to0$，$g(x)_{极小值}=g(1)=\dfrac{1}{e}$；$g(x)_{极大值}=g(2)=\dfrac{3}{e^2}$．

由 $g(x)$ 的大致图象可知，若 $f(x)$ 有三个零点，则 a 的取值范围为 $\left(\dfrac{1}{e},\dfrac{3}{e^2}\right)$． …………………… 12分

20.【解析】(1)设椭圆的焦距为 $2c$，则 $c=\sqrt{3}$，又因为椭圆经过点 $M\left(\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right)$，所以 $\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}=1$，

又 $a^2-b^2=(\sqrt{3})^2$，所以 $a^2=4$，$b^2=1$，所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$． …………………… 4分

(2)设存在点 $M(m,0)$，

1°当 t 存在时，设 l：$x=ty+4$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 并整理得 $(t^2+4)y^2+8ty+12=0$，

$\Delta=64t^2-48(t^2+4)>0$ 即 $t^2>12$，

$y_1+y_2=\dfrac{-8t}{t^2+4}$，$y_1+y_2=\dfrac{12}{t^2+4}$，

依题意有 $\dfrac{y_1}{x_1-m}+\dfrac{y_2}{x_2-m}=0$ 即 $\dfrac{x_1-m}{y_1}+\dfrac{x_2-m}{y_2}=2t+(4-m)\left(\dfrac{y_1+y_2}{y_1y_2}\right)=0$，

将韦达定理代入得 $2t+(4-m)\left(-\dfrac{2t}{3}\right)=0$，故 $m=1$，

2°当 t 不存在时，MA，MB 的斜率都为 0，也符合．

综上所述，存在点 $M(1,0)$ 使得直线 MA，MB 的斜率之和为 0． …………………… 12分

21.【解析】(1)连接 PO，过点 A 作 PO 的垂线，垂足为 H，

∵平面 $PAC\perp$ 平面 PBD，且交线为 PO，

∴$AH\perp$ 平面 PBD，

又∵$BD\subset$ 平面 PBD，∴$BD\perp AH$，

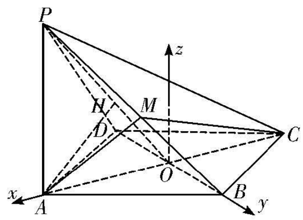
又∵四边形 $ABCD$ 为菱形，∴$BD\perp AC$，又∵$AC\cap AH=A$，

∴$BD\perp$ 平面 PAC，

又∵$PA\subset$ 平面 PAC，∴$BD\perp PA$，

又∵$PA\perp AC$，$AC\cap BD=O$，

∴$PA\perp$ 平面 $ABCD$． …………………… 5分



(2)如图，以 O 为原点，OA 为 x 轴，OB 为 y 轴，建立空间直角坐标系，

则 $A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$P(\sqrt{3},0,2)$，

$\overrightarrow{AC}=(-2\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$，

$\overrightarrow{BP}=(\sqrt{3},-1,2)$，设 $\dfrac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BP}|}=\lambda$，则 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BP}=(\sqrt{3}\lambda,-\lambda,2\lambda)$，

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=(\sqrt{3}(\lambda-1),1-\lambda,2\lambda)$． …………………… 7分

易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$．

设平面 AMC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\sqrt{3}(\lambda-1)x+(1-\lambda)y+2\lambda z=0,\\ -2\sqrt{3}x=0,\end{cases}$

令 $y=2\lambda$，则 $z=\lambda-1$，$x=0$，

即 $\boldsymbol{n}=(0,2\lambda,\lambda-1)$． …………………… 9分

设二面角 $M-AC-B$ 为 θ，

则 $|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，即 $\frac{|\lambda-1|}{\sqrt{4\lambda^2+(\lambda-1)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$.

故二面角 $M-AC-B$ 余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时，$\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BP}|}=\frac{1}{2}$. ………………………… 12 分

22.【解析】(1) 若 $a=-1$，则 $f(x)=x\ln x+x^2-1$，所以 $f'(x)=\ln x+1+2x(x>0)$，所以 $f'(1)=3$，

又 $f(1)=0$，所以函数 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-0=3(x-1)$，即 $3x-y-3=0$；………………………… 4 分

(2) 法 1. 若 $f(x)<0$ 对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

即 $\ln x-a\left(x-\frac{1}{x}\right)<0$ 对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

令 $g(x)=\ln x-a\left(x-\frac{1}{x}\right)$，$x>1$，所以 $g'(x)=\frac{1}{x}-a\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-ax^2+x-a}{x^2}$，

若 $a\leqslant 0$，则 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)>g(1)=0$，不符合题意.

若 $a>0$，方程 $-ax^2+x-a=0$ 的判别式 $\Delta=1-4a^2$，

当 $\Delta=1-4a^2>0$，即 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，

令 $g'(x)>0$，解得 $1<x<\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}$，令 $g'(x)<0$，

解得 $x>\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}$，所以 $g(x)$ 在 $\left(1,\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减，所以 $g\left(\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)>g(1)=0$，不符合题意；

当 $\Delta=1-4a^2\leqslant 0$，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，则 $g'(x)\leqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(x)<g(1)=0$，符合题意；综上，a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. ………………………… 8 分

法 2. 若 $f(x)<0$ 对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

即 $\ln x-a\left(x-\frac{1}{x}\right)<0$ 对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

令 $g(x)=\ln x-a\left(x-\frac{1}{x}\right)$，$x>1$，所以 $g'(x)=\frac{1}{x}-a\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$，

$g(1)=0$，若 $g(x)<0$ 对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

则其必要条件为 $g'(1)=1-2a\leqslant 0$，$a\geqslant\frac{1}{2}$. ………………………… 6 分

下证 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$g(x)<0$ 对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

$g'(x)=\frac{1}{x}-a\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-ax^2+x-a}{x^2}$，此时方程 $-ax^2+x-a=0$ 的判别式 $\Delta=1-4a^2\leqslant 0$，

$x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)\leqslant 0$，函数 $g(x)$ 单调递减，故 $g(x)<g(1)=0$，

综上，a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. ………………………… 8 分

(3) 由 (2) 知，当 $x>1$，$a=\frac{1}{2}$ 时，$\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$，令 $x=\frac{2n+1}{2n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $\ln\frac{2n+1}{2n-1}<\frac{1}{2}\left(\frac{2n+1}{2n-1}-\frac{1}{\frac{2n+1}{2n-1}}\right)=\frac{4n}{4n^2-1}$，所以 $\frac{4n}{4n^2-1}>\ln(2n+1)-\ln(2n-1)$，

所以 $\frac{4\times1}{4\times1^2-1}+\frac{4\times2}{4\times2^2-1}+\cdots+\frac{4n}{4n^2-1}>\ln 3-\ln 1+\ln 5-\ln 3+\cdots+\ln(2n+1)-\ln(2n-1)=\ln(2n+1)$，

即 $\frac{4\times1}{4\times1^2-1}+\frac{4\times2}{4\times2^2-1}+\cdots+\frac{4n}{4n^2-1}>\ln(2n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$. ………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。