

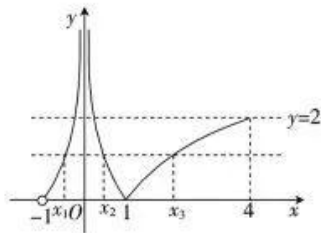
高三 12 月数学试卷参考答案

1. C 由题意可得 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, 则 $A \cap B = \{-2, 0, 2, 3\}$.
2. A 因为 $z = \frac{1+2i}{4+3i} = \frac{(1+2i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{4-3i+8i-6i^2}{16-9i^2} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$, 所以复数 z 在复平面内对应的点为 $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$, 该点位于第一象限. 来源: 高三答案公众号
3. D 因为 $0 < 0.9^{1-1} < 0.9^0 = 1$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3 > 1$, $\log_{\frac{1}{3}} 2 = -\log_3 2 < 0$, 所以 $b > a > c$.
4. B 设该等差数列为 $\{a_n\}$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 27$, 则 $a_2 = 9$, 所以公差 $d = a_3 - a_2 = 5 - 9 = -4$.
5. B 因为 $A = 2B$, 所以 $\sin A = \sin 2B = 2\sin B \cos B$. 因为 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 所以 $\frac{a}{2\sin B \cos B} = \frac{b}{\sin B}$, 所以 $\cos B = \frac{a}{2b}$. 因为 $3a = 4b$, 所以 $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$, 则 $\cos B = \frac{a}{2b} = \frac{2}{3}$.
6. D 因为 $f(x)$ 是奇函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, 所以 $f(-x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, $y = f(-x) - f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, $y = f(2^x - 2^{-x})$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, $y = f(x) - f(-x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减. 又 $g(x) = f(-x) - f(x)$ 满足 $g(-x) = -g(x)$, 所以 $g(x) = f(-x) - f(x)$ 为奇函数, 而 $g(x) = f(x) - f(-x)$ 不满足 $g(-x) = -g(x)$, 故 $g(x) = f(-x) - f(x)$ 既是奇函数, 又在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增.
7. D 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = 4$, 故直线 l 的斜率 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{y_1}{6} - \frac{y_2}{6}}{\frac{y_1}{6} - \frac{y_2}{6}} = \frac{6}{y_1 - y_2} = \frac{3}{2}$.
8. A 由题意可得 $f'(x) = 2xe^x - 2x - a$. 因为 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 $f'(x) = 2xe^x - 2x - a \geq 0$ 恒成立, 即 $a \leq 2xe^x - 2x$ 恒成立. 设 $g(x) = 2xe^x - 2x$, 则 $g'(x) = (2x+2)e^x - 2$. 当 $x < 0$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g(x)_{\min} = g(0) = 0$, 即 $a \leq 0$.
9. AD $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$, A 正确. 因为 $f(\frac{4}{5}) \neq 0$, 所以 $f(x)$ 的图象不关于点 $(\frac{4}{5}, 0)$ 对称, B 错误. 因为 $f(\frac{15}{4}) = 2\sin \frac{\pi}{2}$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{15}{4}$ 对称, D 正确. 若 $x \in (0, \frac{25}{4})$, 则 $\frac{\pi}{5}x - \frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{4}, \pi)$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{25}{4})$ 上有最大值, 没有最小值, C 错误.
10. BCD 由 $4a^2 + b^2 = 1 \geq 4ab$, 得 $ab \leq \frac{1}{4}$, 当且仅当 $a = \frac{\sqrt{2}}{4}, b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立, 故 A 错误; $4a^2 + b^2 = (2a+b)^2 - 4ab = 1$, 则 $(2a+b)^2 = 1 + 4ab \leq 2$, 即 $2a+b \leq \sqrt{2}$, 当且仅当 $a = \frac{\sqrt{2}}{4}, b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立, 故 B 正确; $4a + b^2 = 4a + 1 - 4a^2 = -4a^2 + 4a + 1 = -(2a-1)^2 + 2 \leq 2$, 当且仅

当 $a = \frac{1}{2}, b = 0$ 时, 等号成立, 故 C 正确; $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} = \frac{1}{6} (\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1}) (4a^2+4+b^2+1) = \frac{1}{6} (4+1+\frac{b^2+1}{a^2+1} + \frac{4a^2+4}{b^2+1}) \geq \frac{5+4}{6} = \frac{3}{2}$, 当且仅当 $a^2 = 0, b^2 = 1$ 时, 等号成立, 故 D 正确.

11. BC 由题意可得直线 l 过定点 $A(-1, 1)$, 圆 C 的圆心 C 的坐标为 $(2, -3)$, 半径 $r = 6$, 则 A 错误, B 正确. 因为 $|AC| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 < 6$, 所以点 A 在圆 C 内部, 所以直线 l 与圆 C 一定相交, 则 C 正确. 点 C 到直线 l 的距离 $d \leq |AC| = 5$, 则点 P 到直线 l 的距离的最大值是 11, 故 D 错误.

12. ABD 作出 $f(x)$ 的大致图象, 如图所示.



$a = -\log_2(-x_1) = -\log_2 x_2 = \log_2 x_3$, 其中 $x_3 \in (1, 4]$, 所以 $a \in (0, 2]$, 则 $x_1 \in (-1, -\frac{1}{4}]$,

$x_2 \in [\frac{1}{4}, 1)$, $x_1 x_2 = -1$. 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时, $f(x) = |\log_2 |x||$ 是偶函数, 则 $x_1 + x_2 = 0$,

所以 $x_1 x_2 x_3 = x_1 \in (-1, -\frac{1}{4}]$, $x_1^2 x_2 = x_3 \in (1, 1]$, A, B 均正确. $x_2 + 4x_3 \geq 2\sqrt{4x_2 x_3}$

$= 4$, 当且仅当 $x_2 = 4x_3 = \frac{4}{x_2}$, 即 $x_2 = 2$ 时, 等号成立, 但 $2 \notin [\frac{1}{4}, 1)$, C 错误.

因为 $|\frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_1 x_2}| = |\frac{x_2 + x_3}{x_1 x_2 x_3}| = |\frac{x_2 + x_3}{x_1}| = |\frac{x_2 + x_3}{-x_2}| = 1 + \frac{x_3}{x_2} = 1 + x_3^2$, 所以 $|\frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_1 x_2}| + \frac{16}{x_3} = 1 + x_3^2 + \frac{16}{x_3}$.

设函数 $g(x) = 1 + x^2 + \frac{16}{x} (1 < x \leq 4)$, 则 $g'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2}$, 当 $1 < x < 2$ 时, $g'(x) < 0$,

当 $2 < x \leq 4$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)_{\min} = g(2) = 1 + 4 + 8 = 13$, D 正确.

13. $\frac{\pi}{3}$ 因为 $|a + 2b| = \sqrt{7}$, 所以 $a^2 + 4a \cdot b + 4b^2 = 7$. 因为 $|a| = |b| = 1$, 所以 $a \cdot b = \frac{1}{2}$, 则

$\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{1}{2}$, 故向量 a, b 的夹角是 $\frac{\pi}{3}$.

14. -12 $(x - \frac{2}{x^3})^6$ 展开式的通项 $T_{r+1} = C_6^r \cdot x^{6-r} \cdot (-\frac{2}{x^3})^r = (-2)^r \cdot C_6^r \cdot x^{6-4r}$. 令 $6-4r = 2$, 得 $r = 1$, 则 $T_2 = -2 \times C_6^1 x^2 = -12x^2$.

15. $-\frac{3}{4}$ 因为 $\sin(\alpha + \frac{5\pi}{2}) = 3\sin(\alpha - \pi)$, 所以 $\cos \alpha = -3\sin \alpha$, 所以 $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$, 则 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{3}{4}$.

16.2 设 O 为坐标原点, C 的焦距为 $2c$. 过点 A 作 AH 垂直于 x 轴, 垂足为 H (图略). 易得

$$|AF_2|=b, |AH|=\frac{ab}{c}, \text{ 则由 } |OA|^2=|OH| \cdot |OF_2|, \text{ 得 } |OH|=\frac{a^2}{c}, \text{ 所以 } |BH|=a+\frac{a^2}{c}=$$

$$\sqrt{|AB|^2-|AH|^2}=\frac{\sqrt{3}ab}{c}, \text{ 得 } c+a=\sqrt{3}b, \text{ 所以 } (c+a)^2=3b^2=3(c^2-a^2), \text{ 故 } e=\frac{c}{a}=2.$$

17. 解: (1) 因为 $\sqrt{2}a \sin C - c = 0$, 所以 $\sqrt{2} \sin A \sin C - \sin C = 0$ 2 分

因为 $\sin C \neq 0$, 所以 $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 3 分

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以 $A = \frac{\pi}{4}$ 5 分

(2) 因为 $A = \frac{\pi}{4}$, 所以 $B + C = \frac{3\pi}{4}$ 6 分

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以 $\begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \frac{3\pi}{4} - B < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 得 $\frac{\pi}{4} < B < \frac{\pi}{2}$ 8 分

因为 $2\sqrt{2} \sin B - 2 \sin C = 2\sqrt{2} \sin B - 2 \sin(A+B) = \sqrt{2} \sin B - \sqrt{2} \cos B = 2 \sin(B - \frac{\pi}{4})$,

且 $\sin(B - \frac{\pi}{4}) \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 所以 $2\sqrt{2} \sin B - 2 \sin C \in (0, \sqrt{2})$ 10 分

18. 解: (1) 因为 $(0.008 + 0.018) \times 10 = 0.26 < 0.5$, $0.26 + 0.032 \times 10 = 0.58 > 0.5$,

所以该板栗园的板栗质量的中位数在 $[50, 60]$ 内. 2 分

设该板栗园的板栗质量的中位数为 m , 则 $(m - 50) \times 0.032 + 0.26 = 0.5$, 3 分

解得 $m = 57.5$, 即该板栗园的板栗质量的中位数约为 57.5. 5 分

(2) 由题意可知采用分层抽样的方法从质量在 $[40, 50]$ 内的板栗中抽取 $10 \times \frac{0.018}{0.018 + 0.012}$

$= 6$ 颗, 从质量在 $[70, 80]$ 内的板栗中抽取 $10 \times \frac{0.012}{0.018 + 0.012} = 4$ 颗. 6 分

X 的所有可能取值为 $0, 1, 2, 3, 4$ 7 分

$P(X=0) = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{14}, P(X=1) = \frac{C_6^3 C_4^1}{C_{10}^4} = \frac{8}{21}$, 8 分

$P(X=2) = \frac{C_6^2 C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{7}, P(X=3) = \frac{C_6^1 C_4^3}{C_{10}^4} = \frac{4}{35}$, 9 分

$P(X=4) = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210}$. 列表如下:

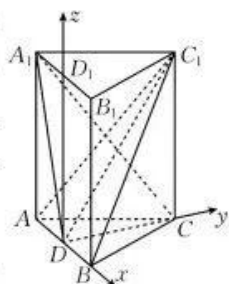
从而 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

..... 10 分

故 $E(X) = 0 \times \frac{1}{14} + 1 \times \frac{8}{21} + 2 \times \frac{3}{7} + 3 \times \frac{4}{35} + 4 \times \frac{1}{210} = \frac{8}{5}$ 12分

19. (1) 证明: 由三棱柱的性质可知 $CC_1 \parallel AA_1$ 1分
 因为 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 所以 $CC_1 \perp$ 平面 ABC 2分
 因为 $AB \subset$ 平面 ABC , 所以 $CC_1 \perp AB$ 3分
 因为 D 为 AB 的中点, 且 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以 $CD \perp AB$ 4分
 因为 $CD, CC_1 \subset$ 平面 CC_1D , 且 $CC_1 \cap CD = C$, 所以 $AB \perp$ 平面 CC_1D .
 5分



(2) 解: 取 A_1B_1 的中点 D_1 , 连接 DD_1 . 易证 DB, DC, DD_1 两两垂直, 故以 D 为坐标原点, $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $AB=2$, 则 $A(-1, 0, 0), B(1, 0, 0), C(0, \sqrt{3}, 0), D(0, 0, 0), A_1(-1, 0, 3), C_1(0, \sqrt{3}, 3)$,
 故 $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 0), \overrightarrow{AC_1} = (1, \sqrt{3}, 3), \overrightarrow{DA_1} = (-1, 0, 3), \overrightarrow{DC} = (0, \sqrt{3}, 0)$ 7分
 设平面 A_1CD 的法向量为 $n = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{DA_1} = -x_1 + 3z_1 = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{DC} = \sqrt{3}y_1 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } x_1 = 3, \text{ 得 } n = (3, 0, 1). \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设平面 ABC_1 的法向量为 $m = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AB} = 2x_2 = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{AC_1} = x_2 + \sqrt{3}y_2 + 3z_2 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y_2 = \sqrt{3}, \text{ 得 } m = (0, \sqrt{3}, -1). \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

设平面 A_1CD 与平面 ABC_1 的夹角为 θ .

$$\text{则 } \cos \theta = |\cos \langle n, m \rangle| = \frac{|n \cdot m|}{|n| |m|} = \frac{1}{\sqrt{10} \times 2} = \frac{\sqrt{10}}{20}, \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

即平面 A_1CD 与平面 ABC_1 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{20}$ 12分

20. 解: (1) 因为 $|MF_1| + |MF_2| = 4 > |F_1F_2| = 2$, 所以 E 是以 F_1, F_2 为焦点, 且长轴长为 4 的椭圆. 1分

设 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 则 $2a = 4$, 可得 $a = 2$ 2分

又 $c = 1$, 所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$, 3分

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4分

(2) 由题意可知直线 l 的斜率不为 0, 设直线 $l: x = my + 1, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my + 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \quad \text{整理得 } (3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = (6m)^2 - 4(3m^2 + 4) \times (-9) = 144(m^2 + 1) > 0,$$

$$y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

由弦长公式可得 $|AB| = \sqrt{m^2+1} |y_1 - y_2| = \sqrt{m^2+1} \cdot \sqrt{\left(-\frac{6m}{3m^2+4}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{9}{3m^2+4}\right)}$
 $= \frac{12(m^2+1)}{3m^2+4}$ 7分

点 O 到直线 l 的距离 $d = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$, 则 $\triangle OAB$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{6\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$ 9分

设 $t = \sqrt{m^2+1} \geq 1$, 则 $S = \frac{6t}{3(t^2-1)+4} = \frac{6t}{3t^2+1} = \frac{6}{3t+\frac{1}{t}}$ 10分

因为 $t \geq 1$, 所以 $3t + \frac{1}{t} \geq 4$, 所以 $S \leq \frac{3}{2}$, 当且仅当 $m=0$ 时, $S = \frac{3}{2}$ 12分

21. 解: (1) 因为 $a_n + a_n a_{n-1} = a_{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+)$, 所以 $\frac{a_n + a_n a_{n-1}}{a_n a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_n a_{n-1}} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+)$,

所以 $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = 1 (n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+)$ 2分

因为 $a_1 = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{1}{a_1} = 2$, 所以 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是首项为 2, 公差为 1 的等差数列, 4分

则 $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} + (n-1)d = n+1$ 5分

故 $a_n = \frac{1}{n+1}$ 6分

(2) 由(1)可得 $b_n = (-1)^{n-1} (2n-3) \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$ 7分

当 n 为奇数时, $T_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - \dots - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) =$
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} = \frac{n+4}{2n+4}$; 9分

当 n 为偶数时, $T_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - \dots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) =$
 $\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2n+4}$ 11分

综上所述, $T_n = \begin{cases} \frac{n+4}{2n+4}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{n}{2n+4}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$ 12分

22. (1) 解: $f'(x) = \cos x + 2x, f'(0) = 1, f(0) = 0$ 2分

故曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = x$ 4分

(2) 证明: 由(1)得 $f'(x) = \cos x + 2x$.

令函数 $u(x) = f'(x)$, 则 $u'(x) = -\sin x + 2 > 0$, 所以 $u(x) = f'(x)$ 是增函数. 5分

$f'(0) = 1, f'(-\frac{1}{2}) = \cos \frac{1}{2} - 1 < 0$, 6分

所以存在 $x_0 \in (-\frac{1}{2}, 0)$, 使得 $f'(x_0) = \cos x_0 + 2x_0 = 0$, 即 $x_0^2 = \frac{1}{4} \cos^2 x_0$ 7分

所以当 $x \in (-\infty, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,
 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增. 8 分
 $f(x) \geq f(x_0) = \sin x_0 + x_0^2 = \sin x_0 + \frac{1}{4} \cos^2 x_0 = -\frac{1}{4} \sin^2 x_0 + \sin x_0 + \frac{1}{4}$ 9 分
 因为 $x_0 \in (-\frac{1}{2}, 0)$, 所以 $0 > \sin x_0 > \sin(-\frac{1}{2}) > \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$,
 所以 $-\frac{1}{4} \sin^2 x_0 + \sin x_0 + \frac{1}{4} > -\frac{1}{4} \times (-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{5}{16}$ 11 分
 故 $f(x) > -\frac{5}{16}$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜

自主选拔在线