数学试卷参考答案

1. B　由题意得 A 到 Ozx 平面的距离为 $|-3|=3$.

2. D　因为 $-\tan 34^\circ=\tan 146^\circ$，所以直线 $y=-x\tan 34^\circ+5$ 的倾斜角为 146°.

3. D　由题意得 $|OM|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2}=3$，所以 $|OP|$ 的最大值为 $|OM|+1=4$.

4. A　由题意得 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+b^2}$，$|AC|=7-a=4$，易得 $|AB|=|AC|$，所以 $\sqrt{9+b^2}=4$，得 $b=\sqrt{7}$.

5. C　若 A,B 在直线 l 的同侧，则 $\frac{3-5}{4-3}=-\frac{2}{a}$，解得 $a=1$. 若 A,B 分别在直线 l 的两侧，则直线 l 经过 AB 的中点 $(\frac{7}{2},4)$，则 $7+4a+1=0$，解得 $a=-2$.

6. B　因为 E,F 分别为 BC,AE 的中点，所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. 因为 G 为 $\triangle ACD$ 的重心，所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$，

   所以 $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})-\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

7. B　记 E 的右焦点为 F_1，MF 的中点为 P，连接 MF_1，PF_1(图略). 因为 $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{NF}$，$O$ 为 FF_1 的中点，所以 $ON /\!/ PF_1$，则 $MF\perp PF_1$，从而 $|MF_1|=|FF_1|=2c$. 又 $\tan\angle MFF_1=\frac{\sqrt{7}}{3}$，所以 $\cos\angle MFF_1=\frac{|MF|}{2|FF_1|}=\frac{3}{4}$，则 $|MF|=3c$，$|MF|-|MF_1|=3c-2c=c=2a$，故 E 的离心率为 2.

8. A　由题可知 $F(3,0)$，设 l 的方程为 $x=ty+3$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 联立方程组 $\begin{cases}y^2=12x,\\x=ty+3,\end{cases}$ 整理得 $y^2-12ty-36=0$，则 $y_1+y_2=12t$，$y_1y_2=-36$，$|FA|=x_1+3=\frac{y_1^2}{12}+3$，$|FB|=x_2+3=\frac{y_2^2}{12}+3=\frac{108}{y_1^2}+3$，则 $|FA|\cdot|FB|=(\frac{y_1^2}{12}+3)(\frac{108}{y_1^2}+3)=18+\frac{y_1^2}{4}+\frac{324}{y_1^2}\geqslant 36$，当且仅当 $y_1^2=36$ 时，等号成立.

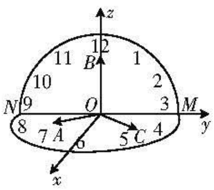
9. ABD　由题意得 $a=2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{8-6}=\sqrt{2}$，则 M 的长轴长为 $4\sqrt{2}$，M 的短轴长为 $2\sqrt{6}$，F_1 的坐标为 $(0,\sqrt{2})$，$|PF_2|$ 的最小值为 $a-c=\sqrt{2}$.

10. CD　由题意得 $|OM|=\sqrt{5}$，圆 O 与圆 M 的半径之和为 $2+2=4$，半径之差为 0，因为 $0<\sqrt{5}<4$，所以圆 O 与圆 M 的位置关系为相交. 由题意得 $k_{OM}=2$，因为圆 O 与圆 M 的半径相等，所以公切线的斜率为 2.

    设公切线的方程为 $y=2x+b$，即 $2x-y+b=0$，由 $\frac{|0-0+b|}{\sqrt{5}}=2$，得 $b=+2\sqrt{5}$，所以公切线的方程为 $2x-y+2\sqrt{5}=0$ 或 $2x-y-2\sqrt{5}=0$.

11. AD　由题知 $a=2,b=1$，则 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$. 因为 P 在第一象限，所以 $|PF_1|-|PF_2|=4$. 在 $\triangle PF_1F_2$ 中，因为 $\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=\dfrac{15}{16}$，所以 $\sin\angle F_1PF_2=\sqrt{1-\cos^2\angle F_1PF_2}=\sqrt{1-(\dfrac{15}{16})^2}=\dfrac{\sqrt{31}}{16}$，且 $(|PF_1|-|PF_2|)^2=16=20-\dfrac{1}{8}|PF_1||PF_2|$，可得 $|PF_1||PF_2|=32$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\angle F_1PF_2=\dfrac{1}{2}\times32\times\dfrac{\sqrt{31}}{16}=\sqrt{31}$. 因为 $(|PF_1|+|PF_2|)^2=(|PF_1|-|PF_2|)^2+4|PF_1||PF_2|=144$，所以 $|PF_1|+|PF_2|=12$，故 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $12+2\sqrt{5}$.

12. ACD　如图，以 O 为坐标原点，OM，OB 所在直线分别为 y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(1,-\sqrt{3},0)$，$B(0,0,3)$，$M(0,2\sqrt{3},0)$，$N(0,-2\sqrt{3},0)$. 若秒针 OC 指向了钟上数字5，则 $C(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},0)$，$\overrightarrow{OA}=(1,-\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BC}=(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},-3)$，$\overrightarrow{OB}=(0,0,3)$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，所以 $OA\perp BC$，A 正确. $OA\perp OB$，故 $\overrightarrow{OA}$ 是平面 OBC 的一个法向量. 因为 $\overrightarrow{NA}=(1,\sqrt{3},0)$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{NA}=-2\neq0$，所以 OA 与 NA 不垂直，从而 NA 与平面 OBC 不平行，B 不正确. 若秒针 OC 指向了钟上数字4，则 $C(\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{AM}=(-1,3\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BC}=(\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-3)$，$\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{12}{2\sqrt{7}\times3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$，C 正确. 由 $\overrightarrow{AC}=(\dfrac{1}{2},\dfrac{5\sqrt{3}}{2},0)$，得 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{19}$. 因为 $\angle AOC=120^\circ$，所以 $\triangle OAC$ 外接圆的半径 $r=\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{2\sin\angle AOC}=\dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$，则四面体 $OABC$ 外接球的半径 $R=\sqrt{r^2+\dfrac{9}{4}}$，则 $R^2=\dfrac{103}{12}$，故四面体 $OABC$ 外接球的表面积为 $4\pi R^2=\dfrac{103}{3}\pi$，D 正确.



13. $(-1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$　$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}=(-1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$.

14. 6　因为点 A 到 C 的焦点的距离为 9，到 x 轴的距离为 6，所以 $\dfrac{p}{2}=3$，则 $p=6$.

15. -1　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由题意得 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{5}+\dfrac{y_1^2}{3}=1,\\ \dfrac{x_2^2}{5}+\dfrac{y_2^2}{3}=1,\end{cases}$ 两式相减得 $\dfrac{x_1^2-x_2^2}{5}+\dfrac{y_1^2-y_2^2}{3}=\dfrac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{5}+\dfrac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{3}=\dfrac{2(x_1-x_2)}{5}+\dfrac{2m(y_1-y_2)}{3}=0$，

则 $\dfrac{1}{5}+\dfrac{m(y_1-y_2)}{3(x_1-x_2)}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{m}{3}\times\dfrac{3}{5}=0$，得 $m=-1$.

16. $6\sqrt{10}$　设 $P(x,y)$，$A(1,0)$，则 $\frac{|PA|}{|PC|}=\sqrt{\frac{(x-1)^2+y^2}{(x-4)^2+y^2}}=\sqrt{\frac{5-2x}{20-8x}}=\frac{1}{2}$，故 $2|PD|-|PC|=2(|PD|-|PA|)\leqslant 2|AD|=6\sqrt{10}$，当且仅当 A,D,P 三点共线，且点 A 在 DP 之间时取得最大值.

17. 解：(1)由题意得 $k_{AB}=\frac{-4+1}{-2-1}=1$，…… 2 分

则 l 的方程为 $y+1=x-1$，…… 4 分

其斜截式方程为 $y=x-2$. …… 5 分

(2)设 l 的截距式方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，…… 6 分

由题意得 $\begin{cases}\frac{-2}{a}+\frac{-4}{b}=1,\\ a=-4,\end{cases}$ …… 8 分

得 $b=-8$，所以 l 在 y 轴上的截距为 -8. …… 10 分

18. 解：(1)将 C_1 的方程转化为 $(x-2)^2+y^2=9$，知 C_1 的圆心为 $(2,0)$，半径为 3. …… 1 分

设 C_2 的圆心为 (a,b)，半径为 r，因为 C_1 与 C_2 关于直线 $l: x-y+1=0$ 对称，

所以 $\begin{cases}\frac{2+a}{2}-\frac{b}{2}+1=0,\\ \frac{b-0}{a-2}=-1,\\ r=3,\end{cases}$ …… 3 分

解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=3,\\ r=3,\end{cases}$ …… 5 分

故 C_2 的标准方程为 $(x+1)^2+(y-3)^2=9$. …… 6 分

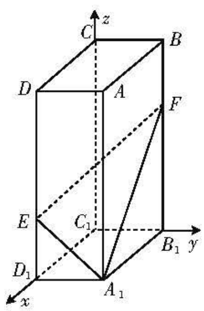
(2) $|C_1C_2|=\sqrt{(2+1)^2+(0-3)^2}=3\sqrt{2}$，…… 7 分

根据对称性可知 C_1 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|C_1C_2|}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，…… 9 分

则 $|AB|=2\sqrt{9-d^2}=3\sqrt{2}$，…… 10 分

则四边形 AC_1BC_2 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB||C_1C_2|=9$. …… 12 分

19. 解：以 C_1 为坐标原点，C_1D_1，C_1B_1，C_1C 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，…… 1 分



则 $A_1(2,1,0)$，$E(2,0,1)$，$F(0,1,2)$，所以 $\overrightarrow{A_1E}=(0,-1,1)$，$\overrightarrow{EF}=(-2,1,1)$. …… 3 分

(1)证明：因为 $\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{EF}=0$，所以 $EF\perp A_1E$. …… 5 分

(2)设平面 A_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{A_1E}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}-y+z=0,\\-2x+y+z=0.\end{cases}$不妨取 $z=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$. ………………………………………… 7 分

易得 $C_1C\perp$平面 $ABCD$，所以$\overrightarrow{C_1C}$是平面 $ABCD$ 的一个法向量，且$\overrightarrow{C_1C}=(0,0,3)$. …… 9 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{C_1C}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{C_1C}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{C_1C}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………… 11 分

故平面 A_1EF 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………… 12 分

20. 解：(1)因为$\left|\sqrt{(x-\sqrt{10})^2+y^2}-\sqrt{(x+\sqrt{10})^2+y^2}\right|=2<2\sqrt{10}$，……………………… 1 分

所以 C 是以$(\sqrt{10},0)$，$(-\sqrt{10},0)$为焦点，实轴长为 2 的双曲线. ……………………… 3 分

设 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则 $c=\sqrt{10}$，$a=1$，$b=3$， ………………………………… 4 分

所以 C 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{9}=1$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可得 C 的渐近线方程为 $y=+3x$，由$\begin{cases}y=-3x,\\y=x-4,\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=-3,\end{cases}$即 $D(1,-3)$. ………
……………………………………………………………………………………………………… 7 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由$\begin{cases}y=x-4,\\x^2-\dfrac{y^2}{9}=1,\end{cases}$得 $8x^2+8x-25=0$， ……………………………… 9 分

由韦达定理得$\begin{cases}x_1+x_2=-1,\\x_1x_2=-\dfrac{25}{8},\end{cases}$ ……………………………………………………… 10 分

则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=x_1+x_2-3(y_1+y_2)=x_1+x_2-3(x_1-4+x_2-4)=26$. …… 12 分

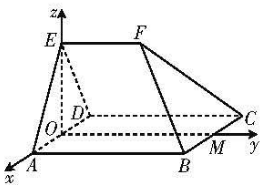
21. (1)证明：因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $AB/\!/CD$. ……………………………………… 1 分

又 $AB\not\subset$平面 $CDEF$，$CD\subset$平面 $CDEF$，所以 $AB/\!/$平面 $CDEF$. ……………………… 3 分

因为平面 $ABFE\cap$平面 $CDEF=EF$，$AB\subset$平面 $ABFE$，所以 $AB/\!/EF$. ……………… 4 分

又 $EF\not\subset$平面 $ABCD$，$AB\subset$平面 $ABCD$，所以 $EF/\!/$平面 $ABCD$. ……………………… 5 分

(2)解：分别取 AD，BC 的中点 O，M，连接 OE，OM，因为平面 $ADE\perp$平面 $ABCD$，$\triangle ADE$ 为正三角形，所以以 O 为坐标原点，OA，OM，OE 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(1,0,0)$，$B(1,4,0)$，$C(-1,4,0)$，$E(0,0,\sqrt{3})$. … 6 分



设 $F(0,m,\sqrt{3})$，则$\overrightarrow{AE}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{BF}=(-1,m-4,\sqrt{3})$， ……………………………………………………………………………… 7 分

设平面 BCF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则由$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\\overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-2x=0,\\-x+(m-4)y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $z=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{m}=(0,-\dfrac{3}{m-4},\sqrt{3})$. ……………………………………………………… 9 分

因为直线 AE 与平面 BCF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$，所以 $|\cos\langle\overrightarrow{AE},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{AE}||\boldsymbol{m}|}=$

$\frac{3}{2\sqrt{\frac{9}{(m-4)^2}+3}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，解得 $m=2$ 或 $m=6$（舍去），…………………………… 11 分

故 $EF=2$. …………………………………………………………………………… 12 分

22.(1)解：由题意得 $\begin{cases}a^2+b^2=3,\\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a^2=2,\\ b^2=1,\\ c^2=1,\end{cases}$ …………………………………… 2 分

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. …………………………………………………… 3 分

(2)证明：当 l_1,l_2 的斜率等于 0 时，$|PQ|=2\sqrt{3-1}=2\sqrt{2}$，$|MN|=2\sqrt{2}$，所以 $|PQ|^2+\frac{8\sqrt{2}}{|MN|}=12$. ……………………………………………………………………… 4 分

当 l_1,l_2 的斜率不等于 0 时，设 $l_1:x=my+t$，则 $l_2:x=my-1$.

由 $\begin{cases}x=my+t,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(m^2+2)y^2+2mty+t^2-2=0$，

令 $\Delta=(2mt)^2-4(m^2+2)(t^2-2)=0$，得 $t^2=m^2+2$. ………………………… 6 分

设 O 到 l_1 的距离为 d，则 $d=\frac{|0+0-t|}{\sqrt{m^2+1^2}}=\frac{|t|}{\sqrt{m^2+1}}$，………………………… 7 分

得 $|PQ|=2\sqrt{3-d^2}=2\sqrt{\frac{3m^2+3-t^2}{m^2+1}}=2\sqrt{\frac{3m^2+3-(m^2+2)}{m^2+1}}=2\sqrt{\frac{2m^2+1}{m^2+1}}$. ……… 8 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}x=my-1,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(m^2+2)y^2-2my-1=0$，则 $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2},\\ y_1y_2=-\frac{1}{m^2+2},\end{cases}$

……………………………………………………………………………………… 9 分

则 $|MN|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\sqrt{\frac{4m^2}{(m^2+2)^2}+\frac{4}{m^2+2}}=\frac{2\sqrt{2}(m^2+1)}{m^2+2}$.

……………………………………………………………………………………… 11 分

故 $|PQ|^2+\frac{8\sqrt{2}}{|MN|}=\frac{4(2m^2+1)}{m^2+1}+\frac{8\sqrt{2}(m^2+2)}{2\sqrt{2}(m^2+1)}=\frac{4(3m^2+3)}{m^2+1}=12$.

综上，$|PQ|^2+\frac{8\sqrt{2}}{|MN|}$ 是定值. ……………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。